Lösungen Exponentialgleichungen III (mit gebrochenem Exponenten)

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse:	
	a)	$3^{2x+1}=243 \Rightarrow \underline{\underline{x=2}}$
	b)	$5^{2x+3}=15625 \Rightarrow \underline{\underline{x=1,5}}$
	c)	$2^{4x+3}=128 \Rightarrow \underline{\underline{x=1}}$
	d)	$4^{3x-2}=16384 \Rightarrow \underline{\underline{x=3}}$
	e)	$6^{5x-2}=1296 \Rightarrow \underline{\underline{x=1,2}}$
	f)	$4\cdot 3,2^{2x-3}=131,072 \Rightarrow \underline{\underline{x=3}}$

E2	Ergebnisse:	
	a)	$5\cdot 1,8^{4x-3}=29,16 \Rightarrow \underline{\underline{x=1,5}}$
	b)	$8\cdot 7,5^{5x-8}=450 \Rightarrow \underline{\underline{x=2}}$
	c)	$2,5\cdot 40^{-x}=342 \Rightarrow \underline{\underline{x\approx -1,333371..}}$
	d)	$3,8\cdot 5^{5-x}=475 \Rightarrow \underline{\underline{x=2}}$
	e)	$2,4\cdot 50^{3-x}=0,048 \Rightarrow \underline{\underline{x=4}}$
	f)	$5,6\cdot 20^{2-x}=0,0007 \Rightarrow \underline{\underline{x=5}}$

E3	Ergebnisse:	
	a)	$8\cdot 9^{4-3x}=\frac{8}{9} \Rightarrow \underline{\underline{x=\frac{5}{3}}}$
	b)	$3^{2x-1}=9^{2x-3} \Rightarrow \underline{\underline{x=2,5}}$
	c)	$2^{3x+1,6}=4^{2x-0,1} \Rightarrow \underline{\underline{x=1,8}}$
	d)	$16^{2x+1}=4^{2x+3} \Rightarrow \underline{\underline{x=\frac{1}{2}}}$
	e)	$3,5^{x-1}=12,25^{x-2} \Rightarrow \underline{\underline{x=3}}$
	f)	$2\cdot 4^{x+1}=1,6\cdot 20^{2x-1} \Rightarrow \underline{\underline{x=1}}$

E4	Ergebnisse:
a)	$\left(38416\right)^{\frac{1}{x}} = 14 \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\{0\}\ ;\ \underline{\underline{x = 4}}$
b)	$\left(1764\right)^{\frac{1}{x}} = 42 \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\{0\}\ ;\ \underline{\underline{x = 2}}$
c)	$\left(83521\right)^{\frac{1}{x-2}} = 17 \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\{2\}\ ;\ \underline{\underline{x = 6}}$
d)	$\left(29791\right)^{\frac{1}{x-1}} = 31 \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\{1\}\ ;\ \underline{\underline{x = 4}}$
e)	$\left(117649\right)^{\frac{1}{x-4}} = 49 \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\{4\}\ ;\ \underline{\underline{x = 7}}$
f)	$\left(27\right)^{\frac{1}{2x+1}} = 3^x \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}; \underline{\underline{x_1 = 1}}; \underline{\underline{x_2 = -\frac{3}{2}}}$

E5	Ergebnisse:
a)	$\left(64\right)^{\frac{1}{x-1}} = 2^x \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\{1\}\ ;\ \underline{\underline{x_1 = 3\ ;\ x_2 = -2}}$
b)	$\left(243\right)^{\frac{1}{x+2}} = 3^{x-4} \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\{-2\}\ ;\ \underline{\underline{x_1 = 1+\sqrt{14} \approx 4{,}742}}\ ;\ \underline{\underline{x_2 = 1-\sqrt{14} \approx -2{,}742}}$
c)	$\left(125\right)^{\frac{1}{x+1}} = 2{,}5\cdot 2^{x-1} \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}\ ;\ \underline{\underline{x_1 = 2\ ;\ x_2 \approx -3{,}32196...}}$
d)	$\left(512\right)^{\frac{1}{2x-3}} = 2\cdot 2^{x-1} \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}; \underline{\underline{x_1 = 3\ ;\ x_2 = -\frac{3}{2}}}$
e)	$\left(343\right)^{\frac{1}{5x-7}} = \left(49\right)^{\frac{1}{3x-4}} \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{7}{5};\frac{4}{3}\right\}; \underline{\underline{x = 2}}$
f)	$\left(578\right)^{\frac{1}{2x-1}} = 8{,}33 \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}; \underline{\underline{x \approx 1{,}999996...}}$

E6	Ergebnisse:
a)	$\left(24{,}6\right)^{\frac{1}{3x-2}} = 2{,}227 \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}; \underline{\underline{x \approx 2{,}00005...}}$
b)	$\left(42{,}875\right)^{\frac{1}{2x+1}} = 3{,}5 \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}; \underline{\underline{x = 1}}$
c)	$\left(81\right)^{\frac{1}{x+1}} = 2^x \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}\ ;\ \underline{\underline{x_1 \approx 2{,}067...\ ;\ x_2 \approx -3{,}067...}}$

E7	Ergebnisse:
a)	$4\cdot 5^{2x-3} = 5\cdot 10^{x-1} \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$
b)	$2^{2(x+1)} - 2^{x+3} = 2^{x+5} - 2^{2x+4} \Rightarrow \underline{\underline{x = 1}}$
c)	$2^{2x+1} + 3^{x+2} = 2^{2(x+1)} + 3^{x+1} \Rightarrow \underline{\underline{x \approx 3{,}819...}}$
d)	$16^{x-2} - 18\cdot 4^{x-2} + 32 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 4\ ;\ x_2 = 2{,}5}}$

E8	Ergebnisse:	
	a)	$5^{2x-4} - 8 \cdot 5^{x-2} + 15 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 3\,;\, x_2 \approx 2{,}683...}}$
	b)	$90 \cdot 3^{3x-2} - 9^{3x-2} - 729 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 2\,;\, x_2 = \frac{4}{3}}}$
	c)	$2^{5x+2} + 3^{2x+2} = 2^{5x+1} + 3^{2x+4} \Rightarrow \underline{\underline{x \approx 2{,}825...}}$
	d)	$36^{4x-3} - 8 \cdot 6^{4x-3} + 12 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 1;\, x_2 \approx 0{,}847...}}$

Wie gehe ich vor?

Wenn es gelingt, die Terme auf beiden Seiten der Exponentialgleichung so umzuformen, dass sich Potenzen mit gleichen Basen ergeben, dann ist eine Lösung mittels Exponentialvergleich möglich.

In vielen Fällen führt der Ansatz über das Logarithmieren zum Erfolg.

Exponentialgleichungen, in denen Summen oder Differenzen vorkommen, können nicht logarithmiert werden. Man kann versuchen, sie mittels Substitution (Einsetzung einer Ersatzvariablen) zu lösen.

Beispiel für die Lösung einer Exponentialgleichung durch logarithmieren

$$3 \cdot 2^{x+3} = 64 \cdot 3^{x-2} \quad |\lg(\ )$$
$$\Leftrightarrow \lg\left(3 \cdot 2^{x+3}\right) = \lg\left(64 \cdot 3^{x-2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \lg(3) + (x+3) \cdot \lg(2) = \lg(64) + (x-2) \cdot \lg(3)$$
$$\Leftrightarrow (x+3) \cdot \lg(2) - (x-2) \cdot \lg(3) = \lg(64) - \lg(3)$$
$$\Leftrightarrow x \cdot \lg(2) + 3\lg(2) - x \cdot \lg(3) + 2\lg(3) = \lg(64) - \lg(3)$$
$$\Leftrightarrow x \cdot \lg(2) - x \cdot \lg(3) = \lg(64) - \lg(3) - 3\lg(2) - 2\lg(3)$$
$$\Leftrightarrow x\left(\lg(2) - \lg(3)\right) = \lg(64) - 3\lg(3) - 3\lg(2)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\lg(64) - 3\lg(3) - 3\lg(2)}{\left(\lg(2) - \lg(3)\right)} = \frac{\lg\left(\frac{64}{3^3 \cdot 2^3}\right)}{\lg\left(\frac{2}{3}\right)} = 3$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

Ausführliche Lösungen

A1	**Aufgabe**					
	Berechnen Sie:					
	a)	$3^{2x+1}=243$	b)	$5^{2x+3}=15625$	c)	$2^{4x+3}=128$
	d)	$4^{3x-2}=16384$	e)	$6^{5x-2}=1296$	f)	$4\cdot 3,2^{2x-3}=131{,}072$

A1	Ausführliche Lösungen			
	a)	$3^{2x+1}=243$ $\Leftrightarrow 3^{2x+1}=3^5$ Exponentenvergleich $\Rightarrow 2x+1=5 \mid -1$ $\Leftrightarrow 2x=4 \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$ Da 243 eine Potenz der Zahl 3 ist, lässt sich die Exponentialgleichung auf einfache Weise durch Exponentenvergleich lösen.	b)	$5^{2x+3}=15625$ $\Leftrightarrow 5^{2x+3}=5^6$ Exponentenvergleich $\Rightarrow 2x+3=6 \mid -3$ $\Leftrightarrow 2x=3 \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\frac{3}{2}}}$ Da 15625 eine Potenz der Zahl 5 ist, lässt sich die Exponentialgleichung auf einfache Weise durch Exponentenvergleich lösen.

A1	Ausführliche Lösungen			
	c)	$2^{4x+3}=128$ $\Leftrightarrow 2^{4x+3}=2^7$ Exponentenvergleich $\Rightarrow 4x+3=7 \mid -3$ $\Leftrightarrow 4x=4 \mid :4$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}$ Da 128 eine Potenz der Zahl 2 ist, lässt sich die Exponentialgleichung auf einfache Weise durch Exponentenvergleich lösen.	d)	$4^{3x-2}=16384$ $\Leftrightarrow 4^{3x-2}=4^7$ Exponentenvergleich $\Rightarrow 3x-2=7 \mid +2$ $\Leftrightarrow 3x=9 \mid :3$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=3}}$ Da 16384 eine Potenz der Zahl 4 ist, lässt sich die Exponentialgleichung auf einfache Weise durch Exponentenvergleich lösen.

A1	Ausführliche Lösungen			
	e)	$6^{5x-2} = 1296$ $\Leftrightarrow 6^{5x-2} = 6^4$ Exponentenvergleich $\Rightarrow 5x - 2 = 4 \mid +2$ $\Leftrightarrow 5x = 6 \mid :5$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{6}{5} = 1{,}2}}$ Da 1296 eine Potenz der Zahl 6 ist, lässt sich die Exponentialgleichung auf einfache Weise durch Exponentenvergleich lösen.	f)	$4 \cdot 3{,}2^{2x-3} = 131{,}072$ $\Leftrightarrow 4 \cdot 3{,}2^{2x-3} = 4 \cdot 3{,}2^3 \mid :4$ $\Leftrightarrow 3{,}2^{2x-3} = 3{,}2^3$ Exponentenvergleich $\Rightarrow 2x - 3 = 3 \mid +3$ $\Leftrightarrow 2x = 6 \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 3}}$ Da 131,072 das 4-fache einer Potenz der Zahl 3,2 ist, lässt sich die Exponentialgleichung auf einfache Weise durch Exponentenvergleich lösen.

A2	**Aufgabe**					
	Berechnen Sie:					
	a)	$5 \cdot 1{,}8^{4x-3} = 29{,}16$	b)	$8 \cdot 7{,}5^{5x-8} = 450$	c)	$2{,}5 \cdot 40^{-x} = 342$
	d)	$3{,}8 \cdot 5^{5-x} = 475$	e)	$2{,}4 \cdot 50^{3-x} = 0{,}048$	f)	$5{,}6 \cdot 20^{2-x} = 0{,}0007$

A2	Ausführliche Lösungen			
	a)	$5 \cdot 1{,}8^{4x-3} = 29{,}16$ $\Leftrightarrow 5 \cdot 1{,}8^{4x-3} = 5 \cdot 1{,}8^3 \mid :5$ $\Leftrightarrow 1{,}8^{4x-3} = 1{,}8^3$ Exponentenvergleich $\Rightarrow 4x - 3 = 3 \mid +3$ $\Leftrightarrow 4x = 6 \mid :4$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}}}$ Da 29,16 das 5-fache einer Potenz der Zahl 1,8 ist, lässt sich die Exponentialgleichung auf einfache Weise durch Exponentenvergleich lösen.	b)	$8 \cdot 7{,}5^{5x-8} = 450$ $\Leftrightarrow 8 \cdot 7{,}5^{5x-8} = 8 \cdot 7{,}5^2 \mid :8$ $\Leftrightarrow 7{,}5^{5x-8} = 7{,}5^2$ Exponentenvergleich $\Rightarrow 5x - 8 = 2 \mid +8$ $\Leftrightarrow 5x = 10 \mid :5$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}$ Da 450 das 8-fache einer Potenz der Zahl 7,5 ist, lässt sich die Exponentialgleichung auf einfache Weise durch Exponentenvergleich lösen.

A2	Ausführliche Lösung
c)	$2{,}5\cdot 40^{-x} = 342 \mid :2{,}5$ $\Leftrightarrow 40^{-x} = \frac{342}{2{,}5} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow -x\cdot\ln(40) = \ln\left(\frac{342}{2{,}5}\right) \mid :\ln(40)$ $\Leftrightarrow -x = \frac{\ln\left(\frac{342}{2{,}5}\right)}{\ln(40)} \mid \cdot(-1)$ $\Leftrightarrow x = -\frac{\ln\left(\frac{342}{2{,}5}\right)}{\ln(40)}$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = -1{,}333371..}}$

A2	Ausführliche Lösungen		
d)	$3{,}8\cdot 5^{5-x} = 475$ $\Leftrightarrow 3{,}8\cdot 5^{5-x} = 3{,}8\cdot 5^3 \mid :3{,}8$ $\Leftrightarrow 5^{5-x} = 5^3$ Exponentenvergleich $\Rightarrow 5-x = 3 \mid -5$ $\Leftrightarrow -x = -2 \mid :(-1)$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}$ Da 475 das 3,8-fache einer Potenz der Zahl 5 ist, lässt sich die Exponentialgleichung durch Exponentenvergleich lösen.	e)	$2{,}4\cdot 50^{3-x} = 0{,}048 \mid :2{,}4$ $\Leftrightarrow 50^{3-x} = 0{,}02 = \frac{1}{50} = 50^{-1}$ Exponentenvergleich $\Rightarrow 3-x = -1 \mid -3$ $\Leftrightarrow -x = -4 \mid :(-1)$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 4}}$ Da 0,02 eine Potenz der Zahl 50 ist, lässt sich die Exponentialgleichung auf einfache Weise durch Exponentenvergleich lösen.

A2	Ausführliche Lösung
f)	$5{,}6\cdot 20^{2-x} = 0{,}0007 \mid :0{,}0007$ $\Leftrightarrow 8000\cdot 20^{2-x} = 1$ $\Leftrightarrow 20^3\cdot 20^{2-x} = 1$ $\Leftrightarrow 20^{5-x} = 1 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow (5-x)\ln(20) = \underbrace{\ln(1)}_{=0}$ $\Leftrightarrow (5-x)\ln(20) = 0 \mid :\ln(20)$ $\Leftrightarrow 5-x = 0 \mid +x$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 5}}$

A3	**Aufgabe**					
	Berechnen Sie:					
	a)	$8\cdot 9^{4-3x}=\frac{8}{9}$	b)	$3^{2x-1}=9^{2x-3}$	c)	$2^{3x+1,6}=4^{2x-0,1}$
	d)	$16^{2x+1}=4^{2x+3}$	e)	$3,5^{x-1}=12,25^{x-2}$	f)	$2\cdot 4^{x+1}=1,6\cdot 20^{2x-1}$

A3 Ausführliche Lösung

a)

$$8\cdot 9^{4-3x}=\frac{8}{9}\,|\cdot 9$$

$$\Leftrightarrow 8\cdot 9\cdot 9^{4-3x}=8\,|:8$$

$$\Leftrightarrow 9\cdot 9^{4-3x}=1$$

$$\Leftrightarrow 9^{5-3x}=1\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(9^{5-3x}\right)=\underbrace{\ln(1)}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow (5-3x)\ln(9)=0\,|:\ln(9)$$

$$\Leftrightarrow 5-3x=0\,|+3x$$

$$\Leftrightarrow 5=3x\,|:3\Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$$

A3 Ausführliche Lösungen

b)

$$3^{2x-1}=9^{2x-3}$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x-1}=\left(3^2\right)^{2x-3}$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x-1}=3^{2(2x-3)}$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x-1}=3^{4x-6}$$

Exponentenvergleich

$$\Rightarrow 2x-1=4x-6\,|-2x$$

$$\Leftrightarrow -1=2x-6\,|+6$$

$$\Leftrightarrow 5=2x\,|:2$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}=2,5$$

c)

$$2^{3x+1,6}=4^{2x-0,1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{3x+1,6}=\left(2^2\right)^{2x-0,1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{3x+1,6}=2^{2(2x-0,1)}$$

$$\Leftrightarrow 2^{3x+1,6}=2^{4x-0,2}$$

Exponentenvergleich

$$\Rightarrow 3x+1,6=4x-0,2\,|-3x$$

$$\Leftrightarrow 1,6=x-0,2\,|+0,2$$

$$\Leftrightarrow 1,8=x$$

$$\Leftrightarrow x=1,8$$

<table>
<tr><td>A3</td><td colspan="4">Ausführliche Lösungen</td></tr>
<tr><td></td><td>d)</td><td>$16^{2x+1} = 4^{2x+3}$
$\Leftrightarrow \left(4^2\right)^{2x+1} = 4^{2x+3}$
$\Leftrightarrow 4^{2(2x+1)} = 4^{2x+3}$
$\Leftrightarrow 4^{4x+2} = 4^{2x+3}$
Exponentenvergleich
$\Rightarrow 4x+2 = 2x+3 \mid -2x$
$\Leftrightarrow 2x+2 = 3 \mid -2$
$\Leftrightarrow 2x = 1 \mid :2$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$</td><td>e)</td><td>$3{,}5^{x-1} = 12{,}25^{x-2}$
$\Leftrightarrow 3{,}5^{x-1} = \left(3{,}5^2\right)^{x-2}$
$\Leftrightarrow 3{,}5^{x-1} = 3{,}5^{2(x-2)}$
$\Leftrightarrow 3{,}5^{x-1} = 3{,}5^{2x-4}$
Exponentenvergleich
$\Rightarrow x-1 = 2x-4 \mid -x$
$\Leftrightarrow -1 = x-4 \mid +4$
$\Leftrightarrow 3 = x$
$\Leftrightarrow x = 3$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>A3</td><td colspan="2">Ausführliche Lösung</td></tr>
<tr><td></td><td>f)</td><td>$2\cdot 4^{x+1} = 1{,}6\cdot 20^{2x-1}$
$\Leftrightarrow 2\cdot\left(2^2\right)^{x+1} = 1{,}6\cdot\left(2^2\cdot 5\right)^{2x-1}$
$\Leftrightarrow 2\cdot 2^{2x+2} = 1{,}6\cdot 2^{4x-2}\cdot 5^{2x-1}\cdot\frac{5}{5}$
$\Leftrightarrow 2^{2x+3} = 8\cdot 2^{4x-2}\cdot 5^{2x-2}$
$\Leftrightarrow 2^{2x+3} = 2^3\cdot 2^{4x-2}\cdot 5^{2x-2}$
$\Leftrightarrow 2^{2x+3} = 2^{4x+1}\cdot 5^{2x-2} \mid :2^{4x+1}$
$\Leftrightarrow \frac{2^{2x+3}}{2^{4x+1}} = 5^{2x-2} \Leftrightarrow 2^{2x+3-(4x+1)} = 5^{2x-2}$
$\Leftrightarrow 2^{-2x+2} = 5^{2x-2} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{2x-2}} = 5^{2x-2} \mid \cdot 2^{2x-2}$
$\Leftrightarrow 1 = (5\cdot 2)^{2x-2} \Leftrightarrow 10^{2x-2} = 1 \mid \lg(\ )$
$\Leftrightarrow (2x-2)\cdot\underbrace{\lg(10)}_{=1} = \underbrace{\lg(1)}_{=0} \Leftrightarrow 2x-2 = 0 \mid +2$
$\Leftrightarrow 2x = 2 \mid :2$
$\Leftrightarrow x = 1$</td></tr>
</table>

A4	**Aufgabe**					
	Berechnen Sie:					
	a)	$\left(38416\right)^{\frac{1}{x}} = 14$	b)	$\left(1764\right)^{\frac{1}{x}} = 42$	c)	$\left(83521\right)^{\frac{1}{x-2}} = 17$
	d)	$\left(29791\right)^{\frac{1}{x-1}} = 31$	e)	$\left(117649\right)^{\frac{1}{x-4}} = 49$	f)	$\left(27\right)^{\frac{1}{2x+1}} = 3^x$

A4 Ausführliche Lösungen

a)

$$\left(38416\right)^{\frac{1}{x}} = 14 \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\Leftrightarrow \left(14^4\right)^{\frac{1}{x}} = 14$$

$$\Leftrightarrow \left(14\right)^{\frac{4}{x}} = 14^1$$

Exponentenvergleich

$$\Rightarrow \frac{4}{x} = 1 \mid \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 4 = x$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 4}}$$

b)

$$\left(1764\right)^{\frac{1}{x}} = 42 \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\Leftrightarrow \left(42^2\right)^{\frac{1}{x}} = 42$$

$$\Leftrightarrow \left(42\right)^{\frac{2}{x}} = 42^1$$

Exponentenvergleich

$$\Rightarrow \frac{2}{x} = 1 \mid \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 2 = x$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}$$

A4 Ausführliche Lösungen

c)

$$\left(83521\right)^{\frac{1}{x-2}} = 17 \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{2\}$$

$$\Leftrightarrow \left(17^4\right)^{\frac{1}{x-2}} = 17$$

$$\Leftrightarrow \left(17\right)^{\frac{4}{x-2}} = 17^1$$

Exponentenvergleich

$$\Rightarrow \frac{4}{x-2} = 1 \mid \cdot (x-2)$$

$$\Leftrightarrow 4 = x - 2 \mid +2$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 6}}$$

d)

$$\left(29791\right)^{\frac{1}{x-1}} = 31 \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$$\Leftrightarrow \left(31^3\right)^{\frac{1}{x-1}} = 31$$

$$\Leftrightarrow \left(31\right)^{\frac{3}{x-1}} = 31^1$$

Exponentenvergleich

$$\Rightarrow \frac{3}{x-1} = 1 \mid \cdot (x-1)$$

$$\Leftrightarrow 3 = x - 1 \mid +1$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 4}}$$

A4 Ausführliche Lösung

e)

$$\left(117649\right)^{\frac{1}{x-4}} = 49 \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{4\}$$

$$\Leftrightarrow \left(49^3\right)^{\frac{1}{x-4}} = 49$$

$$\Leftrightarrow \left(49\right)^{\frac{3}{x-4}} = 49^1$$

Exponentenvergleich

$$\Rightarrow \frac{3}{x-4} = 1 \mid \cdot (x-4)$$

$$\Leftrightarrow 3 = x - 4 \mid +4$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 7}}$$

<table>
<tr><td>A4</td><td colspan="2">Ausführliche Lösung</td></tr>
<tr><td></td><td>f)</td><td>

$$\left(27\right)^{\frac{1}{2x+1}} = 3^x \qquad D = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left(3^3\right)^{\frac{1}{2x+1}} = 3^x$$

$$\Leftrightarrow \left(3\right)^{\frac{3}{2x+1}} = 3^x$$

Exponentenvergleich

$$\Rightarrow \frac{3}{2x+1} = x \mid \cdot\left(2x+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 3 = x\left(2x+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 3 = 2x^2 + x \mid -3$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \mid :2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$$

$$p = \frac{1}{2};\ q = -\frac{3}{2}$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{16} + \frac{3}{2} = \frac{1}{16} + \frac{24}{16} = \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \begin{array}{|l} x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = -\frac{3}{2}$$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>A5</td><td colspan="6">Aufgabe</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="6">Berechnen Sie:</td></tr>
<tr><td></td><td>a)</td><td>$\left(64\right)^{\frac{1}{x-1}} = 2^x$</td><td>b)</td><td>$\left(243\right)^{\frac{1}{x+2}} = 3^{x-4}$</td><td>c)</td><td>$\left(125\right)^{\frac{1}{x+1}} = 2{,}5\cdot 2^{x-1}$</td></tr>
<tr><td></td><td>d)</td><td>$\left(512\right)^{\frac{1}{2x-3}} = 2\cdot 2^{x-1}$</td><td>e)</td><td>$\left(343\right)^{\frac{1}{5x-7}} = \left(49\right)^{\frac{1}{3x-4}}$</td><td>f)</td><td>$\left(578\right)^{\frac{1}{2x-1}} = 8{,}33$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>A5</td><td colspan="2">Ausführliche Lösung</td></tr>
<tr><td></td><td>a)</td><td>

$$\left(64\right)^{\frac{1}{x-1}} = 2^x \qquad D = \mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left(2^6\right)^{\frac{1}{x-1}} = 2^x$$

$$\Leftrightarrow \left(2\right)^{\frac{6}{x-1}} = 2^x$$

Exponentenvergleich

$$\Rightarrow \frac{6}{x-1} = x \mid \cdot\left(x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow 6 = x\left(x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow 6 = x^2 - x \mid -6$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - x - 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$p = -1;\ q = -6$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 6 = \frac{1}{4} + \frac{24}{4} = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \begin{array}{|l} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3;\ x_2 = -2$$

</td></tr>
</table>

A5	Ausführliche Lösung		
	b)	$(243)^{\frac{1}{x+2}} = 3^{x-4} \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ $\Leftrightarrow (3^5)^{\frac{1}{x+2}} = 3^{x-4}$ $\Leftrightarrow (3)^{\frac{5}{x+2}} = 3^{x-4}$ Exponentenvergleich $\Rightarrow \frac{5}{x+2} = x-4 \mid \cdot (x+2)$ $\Leftrightarrow 5 = (x-4)(x+2)$ $\Leftrightarrow 5 = x^2 + 2x - 4x - 8 \mid -5$ $\Leftrightarrow 0 = x^2 - 2x - 13$ $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 13 = 0$	Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 2x - 13 = 0$ $p = -2\,;\, q = -13$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 13 = 14$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{14}$ $\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left\| \begin{array}{l} x_1 = 1 + \sqrt{14} \approx 4{,}742... \\ x_2 = 1 - \sqrt{14} \approx -2{,}742... \end{array} \right.$ $\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 1 + \sqrt{14} \approx 4{,}742...}}$ $\underline{\underline{x_2 = 1 - \sqrt{14} \approx -2{,}742...}}$

A5	Ausführliche Lösung
	c) $\left(125\right)^{\frac{1}{x+1}} = 2{,}5\cdot 2^{x-1} \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $\Leftrightarrow \left(125\right)^{\frac{1}{x+1}} = 2{,}5\cdot 2^{x-1} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}\ln(125) = \ln(2{,}5) + (x-1)\ln(2) \mid \cdot(x+1)$ $\Leftrightarrow \ln(125) = (x+1)\ln(2{,}5) + \left(x^2-1\right)\ln(2) \mid -\ln(125)$ $\Leftrightarrow 0 = x\cdot\ln(2{,}5) + \ln(2{,}5) + x^2\cdot\ln(2) - \ln(2) - \ln(125)$ $\Leftrightarrow \ln(2)\cdot x^2 + \ln(2{,}5)\cdot x + \ln(2{,}5) - \ln(2) - \ln(125) = 0$ $\Leftrightarrow \ln(2)\cdot x^2 + \ln(2{,}5)\cdot x + \ln\left(\frac{2{,}5}{2\cdot 125}\right) = 0 \mid : \ln(2)$ $\Leftrightarrow x^2 + \frac{\ln(2{,}5)}{\ln(2)}x + \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(2)} = 0$ quadratische Gleichung Lösung der quadratischen Gleichung $p = \frac{\ln(2{,}5)}{\ln(2)}\ ;\ q = \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(2)}$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{\ln(2{,}5)}{2\cdot\ln(2)}\right)^2 - \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(2)}$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\left(\frac{\ln(2{,}5)}{2\cdot\ln(2)}\right)^2 - \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(2)}}$ $\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$ $x_1 = -\frac{\ln(2{,}5)}{2\cdot\ln(2)} + \sqrt{\left(\frac{\ln(2{,}5)}{2\cdot\ln(2)}\right)^2 - \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(2)}} = 2$ $x_2 = -\frac{\ln(2{,}5)}{2\cdot\ln(2)} - \sqrt{\left(\frac{\ln(2{,}5)}{2\cdot\ln(2)}\right)^2 - \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(2)}} \approx -3{,}32196\ldots$ $\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 2\ ;\ x_2 \approx -3{,}32196\ldots}}$

A5 Ausführliche Lösung

d)

$$\left(512\right)^{\frac{1}{2x-3}} = 2\cdot 2^{x-1} \quad D = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left(2^9\right)^{\frac{1}{2x-3}} = 2\cdot 2^{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \left(2\right)^{\frac{9}{2x-3}} = 2^x$$

Exponentenvergleich

$$\Rightarrow \frac{9}{2x-3} = x \mid \cdot\left(2x-3\right)$$

$$\Leftrightarrow 9 = 2x^2 - 3x \mid -9$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2x^2 - 3x - 9 \mid :2$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} = 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} = 0$$

$$p = -\frac{3}{2};\ q = -\frac{9}{2}$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} = \frac{9}{16} + \frac{72}{16} = \frac{81}{16}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\ \begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = \frac{12}{4} = 3 \\ x_2 &= \frac{3}{4} - \frac{9}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 3}};\ \underline{\underline{x_2 = -\frac{3}{2}}}$$

A5 Ausführliche Lösung

e)

$$\left(343\right)^{\frac{1}{5x-7}} = \left(49\right)^{\frac{1}{3x-4}} \quad D = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{7}{5};\frac{4}{3}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left(7^3\right)^{\frac{1}{5x-7}} = \left(7^2\right)^{\frac{1}{3x-4}}$$

$$\Leftrightarrow \left(7\right)^{\frac{3}{5x-7}} = \left(7\right)^{\frac{2}{3x-4}}$$

Exponentenvergleich

$$\Rightarrow \frac{3}{5x-7} = \frac{2}{3x-4} \mid \cdot\left(5x-7\right)$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{2\left(5x-7\right)}{3x-4} \mid \cdot\left(3x-4\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(3x-4\right) = 2\left(5x-7\right)$$

$$\Leftrightarrow 9x - 12 = 10x - 14 \mid -10x$$

$$\Leftrightarrow -x - 12 = -14 \mid +12$$

$$\Leftrightarrow -x = -2 \mid \cdot\left(-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}$$

A5	Ausführliche Lösung
	f) $(578)^{\frac{1}{2x-1}} = 8,33 \qquad D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ $\Leftrightarrow (578)^{\frac{1}{2x-1}} = 8,33^1 \mid \ln(\ \ )$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2x-1}\ln(578) = \ln(8,33) \mid \cdot(2x-1)$ $\Leftrightarrow \ln(578) = 2x\cdot\ln(8,33) - \ln(8,33) \mid +\ln(8,33)$ $\Leftrightarrow \ln(578) + \ln(8,33) = 2x\cdot\ln(8,33) \mid : 2\cdot\ln(8,33)$ $\Leftrightarrow \frac{\ln(578)+\ln(8,33)}{2\cdot\ln(8,33)} = x$ $\Leftrightarrow x = \frac{\ln(578\cdot 8,33)}{2\cdot\ln(8,33)} \approx 1,999996...$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x \approx 1,999996...}}$

A6	**Aufgabe**				
	Berechnen Sie:				
	a) $(24,6)^{\frac{1}{3x-2}} = 2,227$	b)	$(42,875)^{\frac{1}{2x+1}} = 3,5$	c)	$(81)^{\frac{1}{x+1}} = 2^x$

A6	Ausführliche Lösung
	a) $(24,6)^{\frac{1}{3x-2}} = 2,227 \qquad D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$ $\Leftrightarrow (24,6)^{\frac{1}{3x-2}} = 2,227^1 \mid \ln(\ \ )$ $\Leftrightarrow \frac{1}{3x-2}\ln(24,6) = \ln(2,227) \mid \cdot(3x-2)$ $\Leftrightarrow \ln(24,6) = 3x\cdot\ln(2,227) - 2\cdot\ln(2,227) \mid +2\cdot\ln(2,227)$ $\Leftrightarrow \ln(24,6) + 2\cdot\ln(2,227) = 3x\cdot\ln(2,227) \mid : 3\cdot\ln(2,227)$ $\Leftrightarrow \frac{\ln(24,6)+2\cdot\ln(2,227)}{3\cdot\ln(2,227)} = x$ $\Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(24,6\cdot 2,227^2\right)}{\ln\left(2,227^3\right)} \approx 2,00005...$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x \approx 2,00005...}}$

A6	Ausführliche Lösung	
	b)	$\left(42{,}875\right)^{\frac{1}{2x+1}} = 3{,}5 \qquad D = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ $\Leftrightarrow \left(3{,}5^3\right)^{\frac{1}{2x+1}} = 3{,}5^1$ Exponentenvergleich $\Rightarrow \frac{3}{2x+1} = 1 \mid \cdot(2x+1)$ $\Leftrightarrow 3 = 2x+1 \mid -1$ $\Leftrightarrow 2 = 2x \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}$

A6	Ausführliche Lösung	
	c)	$\left(81\right)^{\frac{1}{x+1}} = 2^x \qquad D = \mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$ $\Leftrightarrow \left(81\right)^{\frac{1}{x+1}} = 2^x \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}\ln(81) = x\cdot\ln(2) \mid \cdot(x+1)$ $\Leftrightarrow \ln(81) = x(x+1)\ln(2)$ $\Leftrightarrow \ln(81) = x^2\cdot\ln(2) + x\cdot\ln(2) \mid -\ln(81)$ $\Leftrightarrow x^2\cdot\ln(2) + x\cdot\ln(2) - \ln(81) = 0 \mid :\ln(2)$ $\Leftrightarrow x^2 + x - \frac{\ln(81)}{\ln(2)} = 0$ quadratische Gleichung Lösung der quadratischen Gleichung $p = 1;\ q = -\frac{\ln(81)}{\ln(2)}$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\ln(81)}{\ln(2)} = \frac{1}{4} + \frac{\ln(81)}{\ln(2)}$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\ln(81)}{\ln(2)}}$ $\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left\lvert \begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\ln(81)}{\ln(2)}} = 2{,}067\ldots \\ x_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\ln(81)}{\ln(2)}} \approx -3{,}067\ldots \end{array} \right.$ $\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 2{,}067\ldots;\ x_2 \approx -3{,}067\ldots}}$

A7	**Aufgabe**			
	Berechnen Sie:			
	a)	$4\cdot 5^{2x-3} = 5\cdot 10^{x-1}$	b)	$2^{2(x+1)} - 2^{x+3} = 2^{x+5} - 2^{2x+4}$
	c)	$2^{2x+1} + 3^{x+2} = 2^{2(x+1)} + 3^{x+1}$	d)	$16^{x-2} - 18\cdot 4^{x-2} + 32 = 0$

A7a) Ausführliche Lösungen

$$4\cdot 5^{2x-3} = 5\cdot 10^{x-1}$$
$$\Leftrightarrow 2^2\cdot 5^{2x-3} = 5^1\cdot(2\cdot 5)^{x-1}$$
$$\Leftrightarrow 2^2\cdot 5^{2x-3} = 5^1\cdot 2^{x-1}\cdot 5^{x-1}$$
$$\Leftrightarrow 2^2\cdot 5^{2x-3} = 2^{x-1}\cdot 5^{x}\,\big|:5^x$$
$$\Leftrightarrow 2^2\cdot 5^{x-3} = 2^{x-1}\,\big|:2^2$$
$$\Leftrightarrow 5^{x-3} = 2^{x-3}\,\big|:2^{x-3}$$
$$\Leftrightarrow (\tfrac{5}{2})^{x-3} = 1\,\big|\ln()$$
$$\Leftrightarrow (x-3)\underbrace{\ln(\tfrac{5}{2})}_{\neq 0} = \underbrace{\ln(1)}_{=0}\,\big|:\ln(\tfrac{5}{2})$$
$$\Leftrightarrow x-3 = 0\,\big|+3$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=3}}$$

A7b)

$$2^{2(x+1)} - 2^{x+3} = 2^{x+5} - 2^{2x+4}$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x+3} - 2^{x+3} = 2^{x+5} - 2^{2x+4}\,\big|2^2\ \textit{ausklammern}$$
$$\Leftrightarrow 2^2(2^{2x} - 2^{x+1}) = 2^2(2^{x+3} - 2^{2x+2})\,\big|2^x\ \textit{ausklammern}$$
$$\Leftrightarrow 2^x(2^x - 2^1) = 2^x(2^3 - 2^{x+2})\,\big|:2^x$$
$$\Leftrightarrow 2^x - 2 = 2^3 - 2^{x+2}\,\big|+2$$
$$\Leftrightarrow 2^x = 8 + 2 - 2^{x+2}\,\big|+2^{x+2}$$
$$\Leftrightarrow 2^x + 2^{x+2} = 10$$
$$\Leftrightarrow 2^x + 2^x\cdot 4 = 10$$
$$\Leftrightarrow 2^x(1+4) = 10\,\big|:5$$
$$\Leftrightarrow 2^x = 2^1$$
$$\textit{Exponentenvergleich}$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}$$

A7	Ausführliche Lösung
c)	see below

$$2^{2x+1} + 3^{x+2} = 2^{2(x+1)} + 3^{x+1}$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x+1} + 3^{x+2} = 2^{2x+2} + 3^{x+1}\ \big| -2^{2x+2} - 3^{x+2}$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x+1} - 2^{2x+2} = 3^{x+1} - 3^{x+2}$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x+1} - 2\cdot 2^{2x+1} = 3^{x+1} - 3\cdot 3^{x+1}$$
$$\Leftrightarrow -2^{2x+1} = -2\cdot 3^{x+1}$$
$$\Leftrightarrow -2\cdot 2^{2x} = -2\cdot 3^{x+1}\ \big|:(-2)$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x} = 3^{x+1}\ \big|\ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow 2x\cdot\ln(2) = (x+1)\ln(3)$$
$$\Leftrightarrow 2\cdot\ln(2)\cdot x = \ln(3)\cdot x + \ln(3)\ \big| -\ln(3)\cdot x$$
$$\Leftrightarrow 2\cdot\ln(2)\cdot x - \ln(3)\cdot x = \ln(3)$$
$$\Leftrightarrow x\big(2\cdot\ln(2) - \ln(3)\big) = \ln(3)\ \big|:\big(2\cdot\ln(2) - \ln(3)\big)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(3)}{2\cdot\ln(2) - \ln(3)} = \frac{\ln(3)}{\ln(4) - \ln(3)} = \frac{\ln(3)}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)} \approx 3{,}819\ldots$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{x \approx 3{,}819\ldots}}$$

A7	Ausführliche Lösung	
	d)	$16^{x-2} - 18 \cdot 4^{x-2} + 32 = 0$ $\Leftrightarrow (4 \cdot 4)^{x-2} - 18 \cdot 4^{x-2} + 32 = 0$ $\Leftrightarrow (4^2)^{x-2} - 18 \cdot 4^{x-2} + 32 = 0$ $\Leftrightarrow (4^{x-2})^2 - 18 \cdot 4^{x-2} + 32 = 0$ Substitution: $4^{x-2} = u \Leftrightarrow (4^{x-2})^2 = u^2$ $\Leftrightarrow u^2 - 18u + 32 = 0$ quadratische Gleichung $\Rightarrow p = -18 ; q = 32$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{18}{2}\right)^2 - 32$ $= 81 - 32 = 49$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$ $\Rightarrow u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$	$u_1 = 9 + 7 = 16$; $u_2 = 9 - 7 = 2$ $u_1 = 16 \Leftrightarrow 4^{x-2} = 16 = 4^2$ $\Leftrightarrow x - 2 = 2 \mid +2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 4}}$ $u_2 = 2 \Leftrightarrow 4^{x-2} = 2$ $\Leftrightarrow (2^2)^{x-2} = 2^1$ $\Leftrightarrow 2^{2x-4} = 2^1$ $\Leftrightarrow 2x - 4 = 1 \mid +4$ $\Leftrightarrow 2x = 5 \mid : 2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 2{,}5}}$

A8	**Aufgabe**			
	Berechnen Sie:			
	a)	$5^{2x-4} - 8 \cdot 5^{x-2} + 15 = 0$	b)	$90 \cdot 3^{3x-2} - 9^{3x-2} - 729 = 0$
	c)	$2^{5x+2} + 3^{2x+2} = 2^{5x+1} + 3^{2x+4}$	d)	$36^{4x-3} - 8 \cdot 6^{4x-3} + 12 = 0$

A8	Ausführliche Lösung	
	a)	$5^{2x-4} - 8 \cdot 5^{x-2} + 15 = 0$ Substitution: $5^{x-2} = u \Leftrightarrow (5^{x-2})^2 = u^2$ $\Leftrightarrow u^2 - 8u + 15 = 0$ quadratische Gleichung $\Rightarrow p = -8 ; q = 15$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{8}{2}\right)^2 - 15$ $= 16 - 15 = 1$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$ $\Rightarrow u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$	$u_1 = 4 + 1 = 5$; $u_2 = 4 - 1 = 3$ $u_1 = 5 \Leftrightarrow 5^{x-2} = 5^1$ $\Leftrightarrow x - 2 = 1 \mid +2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 3}}$ $u_2 = 3 \Leftrightarrow 5^{x-2} = 3 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow (x-2)\ln(5) = \ln(3) \mid : \ln(5)$ $\Leftrightarrow x - 2 = \frac{\ln(3)}{\ln(5)} \mid +2$ $\Leftrightarrow x = \frac{\ln(3)}{\ln(5)} + 2 \approx 2{,}683...$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 2{,}683...}}$

A8 Ausführliche Lösung

b)

$$90\cdot 3^{3x-2}-9^{3x-2}-729=0$$

$$\Leftrightarrow -9^{3x-2}+90\cdot 3^{3x-2}-729=0\,|\cdot(-1)$$

$$\Leftrightarrow \left(3^2\right)^{3x-2}-90\cdot 3^{3x-2}+729=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3^{3x-2}\right)^2-90\cdot 3^{3x-2}+729=0$$

Substitution: $3^{x-2}=u \Leftrightarrow \left(3^{x-2}\right)^2=u^2$

$\Leftrightarrow u^2-90u+729=0$

quadratische Gleichung

$\Rightarrow p=-90\,;\,q=729$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(-\frac{90}{2}\right)^2-729$$

$$=2025-729=1296$$

$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{1296}=36$

$$\Rightarrow u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\;\begin{array}{l}u_1=45+36=81\\ u_2=45-36=9\end{array}\right.$$

$u_1=81 \Leftrightarrow 3^{3x-2}=81=3^4$ Exponentenvergleich

$\Leftrightarrow 3x-2=4\,|+2 \Leftrightarrow 3x=6\,|:3$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=2}}$

$u_2=9 \Leftrightarrow 3^{3x-2}=9=3^2$ Exponentenvergleich

$\Leftrightarrow 3x-2=2\,|+2 \Leftrightarrow 3x=4\,|:3$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2=\frac{4}{3}}}$

A8	Ausführliche Lösung	
	c)	

c)

$$2^{5x+1}+3^{2x+2}=2^{5x+1}+3^{x+4}\ \textit{nach den Basen anordnen}$$
$$\Leftrightarrow 2^{5x+2}-2^{5x+1}=3^{2x+4}-3^{2x+2}$$
$$\Leftrightarrow 2^2\cdot 2^{5x}-2^1\cdot 2^{5x}=3^4\cdot 3^{2x}-3^2\cdot 3^{2x}$$
$$\Leftrightarrow 2^{5x}(2^2-2^1)=3^{2x}(3^4-3^2)$$
$$\Leftrightarrow 2^{5x}\cdot 2=3^{2x}\cdot 72\mid\ \div 2$$
$$\Leftrightarrow 2^{5x}=36\cdot 3^{2x}\mid\ \ln()$$
$$\Leftrightarrow 5x\cdot\ln(2)=\ln(36)+2x\cdot\ln(3)\mid\ -2x\cdot\ln(3)$$
$$\Leftrightarrow 5x\cdot\ln(2)-2x\cdot\ln(3)=\ln(36)$$
$$\Leftrightarrow x(5\cdot\ln(2)-2x\cdot\ln(3))=\ln(36)\mid\ \div(5\cdot\ln(2)-2\cdot\ln(3))$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\ln(36)}{5\cdot\ln(2)-2\cdot\ln(3)}=\frac{\ln(36)}{\ln(2^5)-\ln(3^2)}=\frac{\ln(36)}{\ln(\frac{2^5}{3^2})}=\frac{\ln(36)}{\ln(\frac{32}{9})}\approx 2,825\ldots$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{x\approx 2,825\ldots}}$$

A8	Ausführliche Lösung	
	d)	$36^{4x-3} - 8\cdot 6^{4x-3} + 12 = 0$ $\Leftrightarrow \left(6^2\right)^{4x-3} - 8\cdot 6^{4x-3} + 12 = 0$ $\Leftrightarrow \left(6^{4x-3}\right)^2 - 8\cdot 6^{4x-3} + 12 = 0$ Substitution: $6^{4x-3} = u \Leftrightarrow \left(6^{4x-3}\right)^2 = u^2$ $\Leftrightarrow u^2 - 8u + 12 = 0$ quadratische Gleichung $\Rightarrow p = -8\,;\, q = 12$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{8}{2}\right)^2 - 12 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{4} = 2$ $\Rightarrow u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \;\Big\vert\; \begin{array}{l} u_1 = 4 + 2 = 6 \\ u_2 = 4 - 2 = 2 \end{array}$ $u_1 = 6 \Leftrightarrow 6^{4x-3} = 6^1$ Exponentenvergleich $\Leftrightarrow 4x - 3 = 1 \mid +3 \Leftrightarrow 4x = 4 \mid :4$ $\Leftrightarrow x_1 = 1$ $u_2 = 2 \Leftrightarrow 6^{4x-3} = 2 \mid \ln(\;)$ $\Leftrightarrow (4x-3)\ln(6) = \ln(2) \mid :\ln(6)$ $\Leftrightarrow 4x - 3 = \frac{\ln(2)}{\ln(6)} \mid +3$ $\Leftrightarrow 4x = \frac{\ln(2)}{\ln(6)} + 3 \mid :4 \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{4\cdot\ln(6)} + \frac{3}{4} \approx 0{,}847...$ $\Leftrightarrow x_2 \approx 0{,}847...$