

Lösungen Exponentialgleichungen VII

Ergebnisse:

E1	Aufgabe		
	Lösen Sie die Gleichungen		
	a) $\sqrt[3]{38416} = 14$	b) $\sqrt[3]{1764} = 42$	c) $x^{-2}\sqrt{83521} = 17$
	d) $x^{-1}\sqrt{29791} = 31$	e) $x^{-4}\sqrt{117649} = 49$	f) $2^{x+1}\sqrt{27} = 3^x$
	g) $x^{-1}\sqrt{64} = 2^x$	h) $x+2\sqrt{243} = 3^{x-4}$	i) $x+1\sqrt{125} = 2,5 \cdot 2^{x-1}$

E1	Ergebnisse	
	a) $\sqrt[3]{38416} = 14 \Rightarrow D = \mathbb{R}^* ; L = \{4\}$	
	b) $\sqrt[3]{1764} = 42 \Rightarrow D = \mathbb{R}^* ; L = \{2\}$	
	c) $x^{-2}\sqrt{83521} = 17 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{2\} ; L = \{6\}$	
	d) $x^{-1}\sqrt{29791} = 31 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{1\} ; L = \{4\}$	
	e) $x^{-4}\sqrt{117649} = 49 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{4\} ; L = \{7\}$	
	f) $2^{x+1}\sqrt{27} = 3^x \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} ; L = \left\{1; -\frac{3}{2}\right\}$	
	g) $x^{-1}\sqrt{64} = 2^x \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{1\} ; L = \{3; -2\}$	
	h) $x+2\sqrt{243} = 3^{x-4} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2\} ; L = \{-2, 7, \dots; 4, 7, \dots\}$	
i) $x+1\sqrt{125} = 2,5 \cdot 2^{x-1} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} ; L = \{2; -3, 32, \dots\}$		

E2	Aufgabe		
	Lösen Sie die Gleichungen		
	a) $2^{x-3}\sqrt{512} = 2 \cdot 2^{x-1}$	b) $5^{x-7}\sqrt{389} = 3^{x-4}\sqrt{53,29}$	c) $2^{x-1}\sqrt{578} = 8,33$
d) $3^{x-2}\sqrt{24,6} = 2,227$	e) $2^{x+1}\sqrt{42,875} = 3,5$	f) $x+1\sqrt{81} = 2^x$	

E2	Ergebnisse	
	a) $2^{x-3}\sqrt{512} = 2 \cdot 2^{x-1} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\} ; L = \left\{3; -\frac{3}{2}\right\}$	
	b) $5^{x-7}\sqrt{389} = 3^{x-4}\sqrt{53,29} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{5}; \frac{4}{3}\right\} ; L = \{2\}$	
	c) $2^{x-1}\sqrt{578} = 8,33 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} ; L = \{2\}$	
	d) $3^{x-2}\sqrt{24,6} = 2,227 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\} ; L = \{2\}$	
	e) $2^{x+1}\sqrt{42,875} = 3,5 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} ; L = \{1\}$	
f) $x+1\sqrt{81} = 2^x \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} ; L = \{-3, 067, \dots; 2, 067, \dots\}$		

E3	Aufgabe
	Gegeben ist eine Folge von Quadraten. Das erste Quadrat hat die Seitenlänge $a = 1$. Das zweite Quadrat hat die Seitenlänge $a = 2$. Die Seitenlänge wird jeweils verdoppelt.
	a) Bestimmen Sie den Inhalt und den Umfang des 5. ; 10. und n – ten Quadrates. b) Für welche Seitenlänge wird der Umfang erstmals größer als der Erdumfang? (Erdumfang ca. 40000 km)

E3	Ergebnisse																																															
	<p>a)</p> <table> <tr> <td>n</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>...</td> <td>n</td> </tr> <tr> <td>Folge von Seitenlängen</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>16</td> <td>...</td> <td>2^{n-1}</td> </tr> <tr> <td>Folge von Inhalten</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>16</td> <td>64</td> <td>256</td> <td>...</td> <td>$2^{2(n-1)}$</td> </tr> <tr> <td>Folge von Umfängen</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>16</td> <td>32</td> <td>64</td> <td>...</td> <td>$4 \cdot 2^{n-1}$</td> </tr> <tr> <td>Inhalte:</td> <td colspan="7">$A_5 = 2^{2 \cdot 4} = 256$; $A_{10} = 2^{2 \cdot 9} = 262144$; $A_n = 2^{2(n-1)}$</td> </tr> <tr> <td>Umfänge:</td> <td colspan="7">$U_5 = 4 \cdot 2^4 = 64$; $U_{10} = 4 \cdot 2^9 = 2048$; $U_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$</td> </tr> </table> <p>b) Bei der Wahl Seitenlänge in m gilt: $40000 \text{ km} = 4 \cdot 10^7 \text{ m}$ Bedingung: $2^{n+1} > 4 \cdot 10^7 \Leftrightarrow n > 13$</p>	n	1	2	3	4	5	...	n	Folge von Seitenlängen	1	2	4	8	16	...	2^{n-1}	Folge von Inhalten	1	4	16	64	256	...	$2^{2(n-1)}$	Folge von Umfängen	4	8	16	32	64	...	$4 \cdot 2^{n-1}$	Inhalte:	$A_5 = 2^{2 \cdot 4} = 256$; $A_{10} = 2^{2 \cdot 9} = 262144$; $A_n = 2^{2(n-1)}$							Umfänge:	$U_5 = 4 \cdot 2^4 = 64$; $U_{10} = 4 \cdot 2^9 = 2048$; $U_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$					
n	1	2	3	4	5	...	n																																									
Folge von Seitenlängen	1	2	4	8	16	...	2^{n-1}																																									
Folge von Inhalten	1	4	16	64	256	...	$2^{2(n-1)}$																																									
Folge von Umfängen	4	8	16	32	64	...	$4 \cdot 2^{n-1}$																																									
Inhalte:	$A_5 = 2^{2 \cdot 4} = 256$; $A_{10} = 2^{2 \cdot 9} = 262144$; $A_n = 2^{2(n-1)}$																																															
Umfänge:	$U_5 = 4 \cdot 2^4 = 64$; $U_{10} = 4 \cdot 2^9 = 2048$; $U_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$																																															

E4	Aufgabe
	Herr Geier legt ein Kapital von 4000 € zu einem Jahreszins von 3,5% an.
	a) Wie hoch ist sein Kapital nach 5 bzw. 10 Jahren?
	b) Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital verdreifacht?
c) Wie hoch müsste die jährliche Verzinsung sein, wenn sich das Kapital in 8 Jahren verdoppeln soll?	

E4	Ergebnisse
	<p>a)</p> $K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n ; K_0 = 4000 \text{ €} ; p = 3,5\%$ $K_5 = 4000 \text{ €} \cdot 1,035^5 = 4750,75 \text{ €} ; K_{10} = 4000 \text{ €} \cdot 1,035^{10} = 5642,40 \text{ €}$
	<p>b)</p> $K_n = 3K_0 \Rightarrow 1,035^n = 3 \Leftrightarrow n = 31,9 \text{ (Jahre)}$
<p>c)</p> $K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n ; K_8 = 2 \cdot K_0 \Rightarrow 2 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^8 \Rightarrow p = 100 \cdot (\sqrt[8]{2} - 1) \approx 9,05 \%$	

E5	Aufgabe
	Faltet man ein Blatt Papier mehrfach längs der Mittellinie, so liegen nacheinander zwei, dann vier, dann acht usw. Schichten übereinander. Wie oft muss man bei einer Papierdicke von 0,3 mm falten, um einen Turm von der Höhe des Eiffelturms (318 m) zu erhalten?
E5	Ergebnis
	Schichtenfolge: 1; 2; 4; 8; 16; ...; 2^n Papierdicke 0,3 mm; Höhen in mm: 0,3; 0,6; 1,2; ...; $0,3 \cdot 2^n$ $318 \text{ m} = 318000 \text{ mm} \Rightarrow 0,3 \cdot 2^n = 318000$ für $n = 20$ (20 maliges Falten ist nötig)
E6	Aufgabe
	Der Luftdruck p nimmt in der Atmosphäre mit zunehmender Höhe x näherungsweise nach folgender Formel ab: $p(x) = p_0 \cdot e^{-0,137x}$ Dabei ist x die Höhe in km über dem Meeresspiegel und p_0 der Luftdruck auf Meereshöhe. In welcher Höhe über N.N hat der Luftdruck um 25% abgenommen?
E6	Ergebnis
	$p_0 e^{-0,137x} = 0,75 p_0 \Leftrightarrow x \approx 2,1 \text{ km}$
E7	Aufgabe
	Ein Bestand von Fliegen lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) mit der Gleichung $y = 100e^{0,143t}$ für $t \geq 0$ beschreiben.
	a) Nach wie viel Tagen sind bereits 300 Fliegen vorhanden?
	b) Wie lange dauert es, bis sich die Zahl der Fliegen verdoppelt hat?
E7	Ergebnisse
	a) $100e^{0,143t} = 300$ für $t = 7,68$ (Tage)
	b) $e^{0,143t} = 2$ für $t = 4,85$ (Tage)
E8	Aufgabe
	Der Zerfall eines radioaktiven Präparates (in g) verläuft nach dem Gesetz: $y = e^{-0,032t+4}; t \text{ in Tagen, } t \geq 0$
	a) Wie hoch ist die Masse in g zu Beginn der Messungen?
	b) Nach wie viel Tagen sind nur noch 2% der ursprünglichen Masse vorhanden?
E8	Ergebnisse
	a) $y = e^{-0,032t+4}$ für $t = 0: y = e^4 \approx 54,6$ (g)
	b) $e^{-0,032t} = 0,02$ für $t = 122,25$ (Tage)