Lineare Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen und 2 Variablen

Ein solches Gleichungssystem besteht aus zwei Gleichungen.
Gesucht ist die gemeinsame Lösung beider Gleichungen.
Es gibt unterschiedliche Verfahren um zur Lösung zu gelangen.

Das Additionsverfahren

Lösungsschritte für das Additionsverfahren Variante 1		Gleichungssystem $(I)\quad 5x-2y=1$ $(II)\quad 3x+3y=9$
1.	Gleichungen äquivalent so umformen, dass die Koeffizienten (Vorzahlen) der Variablen **y**, bis auf das Vorzeichen übereinstimmen.	$(I)\quad 5x-2y=1\,\vert\cdot 1{,}5$ $(II)\quad 3x+3y=9$ $(I)\quad 7{,}5x-3y=1{,}5$ $(II)\quad 3x+3y=9$
2.	Die entstandenen Gleichungen addieren und nach der Variablen **x** auflösen.	$\left.\begin{array}{l}(I)\quad 7{,}5x-3y=1{,}5\\(II)\quad 3x+3y=9\end{array}\right\}+$ $10{,}5x=10{,}5\,\vert:10{,}5$ $\Leftrightarrow\quad x=1$
3.	Den gefundenen Wert für x in eine der beiden Gleichungen einsetzen und nach der Variablen **y** auflösen.	$x=1$ eingesetzt in (II): $3x+3y=9$ $3\cdot 1+3y=9$ $\Leftrightarrow 3+3y=9\,\vert-3$ $\Leftrightarrow\quad 3y=6\,\vert:3$ $\Leftrightarrow\quad y=2$
4.	Lösungsmenge aufschreiben	$L=\{(1\vert 2)\}$
5.	Probe durch einsetzen	
	$(I)\ 5x-2y=1\Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1\Leftrightarrow 5-4=1\Leftrightarrow 1=1\quad (w)$ $(II)\ 3x+3y=9\Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9\Leftrightarrow 3+6=9\Leftrightarrow 9=9\quad (w)$	

Lösungsschritte für das Additionsverfahren Variante 2		Gleichungssystem $(I) \quad 5x - 2y = 1$ $(II) \quad 3x + 3y = 9$
1.	Gleichungen äquivalent so umformen, dass die Koeffizienten (Vorzahlen) der Variablen **x**, bis auf das Vorzeichen übereinstimmen.	$(I) \quad 5x - 2y = 1 \mid \cdot 3$ $(II) \quad 3x + 3y = 9 \mid \cdot (-5)$ $(I) \quad 15x - 6y = 3$ $(II) \quad -15x - 15y = -45$
2.	Die entstandenen Gleichungen addieren und nach der Variablen **y** auflösen.	$\left.\begin{array}{l}(I) \quad 15x - 6y = 3 \\ (II) \quad -15x - 15y = -45\end{array}\right\} +$ $-21y = -42 \mid : (-21)$ $\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 2}}$
3.	Den gefundenen Wert für y in eine der beiden Gleichungen einsetzen und nach der Variablen **x** auflösen.	$y = 2$ eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$ $3x + 3 \cdot 2 = 9$ $\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \mid -6$ $\Leftrightarrow 3x = 3 \mid : 3$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$
4.	Lösungsmenge aufschreiben	$\underline{\underline{L = \{(1 \mid 2)\}}}$
5.	Probe durch einsetzen	
	$(I) \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$ $(II) \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$	

Das Gleichsetzverfahren

Lösungsschritte für das Gleichsetzverfahren Variante 1		Gleichungssystem (I) $5x-2y=1$ (II) $3x+3y=9$
1.	Beide Gleichungen werden nach der Variablen **x** aufgelöst .	(I) $5x-2y=1 \mid +2y$ (II) $3x+3y=9 \mid -3y$ (I) $5x = 1+2y \mid :5$ (II) $3x = 9-3y \mid :3$ (I) $x = \frac{1+2y}{5}$ (II) $x = \frac{9-3y}{3}$ (I) $x = \frac{1+2y}{5}$ (II) $x = 3-y$
2.	Die rechten Seiten beider Gleichungen werden gleichgesetzt und nach der Variablen **y** aufgelöst.	$\frac{1+2y}{5} = 3-y \mid \cdot 5$ $\Leftrightarrow 1+2y = 15-5y \mid +5y$ $\Leftrightarrow 1+7y = 15 \quad \mid -1$ $\Leftrightarrow 7y = 14 \quad \mid :7$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$
3.	Der gefundene Wert für y wird in eine der beiden Ausgangsgleichungen eingesetzt, diese dann nach der Variablen **x** aufgelöst.	$y=2$ eingesetzt in (II): $3x+3y=9$ $3x+3\cdot 2=9$ $\Leftrightarrow 3x+6 = 9 \mid -6$ $\Leftrightarrow 3x = 3 \mid :3$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}$
4.	Lösungsmenge:	$\underline{\underline{L=\{(1 \mid 2)\}}}$
5.	Probe durch einsetzen (I) $5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$ (II) $3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$	

Lösungsschritte für das Gleichsetzverfahren Variante 2		Gleichungssystem $(\mathrm{I})\quad 5x-2y=1$ $(\mathrm{II})\quad 3x+3y=9$
1.	Beide Gleichungen werden nach der Variablen **y** aufgelöst .	$(\mathrm{I})\quad 5x-2y=1\,\vert -5x$ $(\mathrm{II})\quad 3x+3y=9\,\vert -3x$ $(\mathrm{I})\quad -2y=1-5x\,\vert :(-2)$ $(\mathrm{II})\quad 3y=9-3x\,\vert :3$ $(\mathrm{I})\quad y=\frac{1-5x}{-2}$ $(\mathrm{II})\quad y=\frac{9-3x}{3}$ $(\mathrm{I})\quad y=\frac{5x-1}{2}$ $(\mathrm{II})\quad y=3-x$
2.	Die rechten Seiten beider Gleichungen werden gleichgesetzt und nach der Variablen **x** aufgelöst.	$\frac{5x-1}{2}=3-x\,\vert \cdot 2$ $\Leftrightarrow 5x-1=6-2x\,\vert +2x$ $\Leftrightarrow 7x-1=6\quad \vert +1$ $\Leftrightarrow 7x=7\quad \vert :7$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}$
3.	Der gefundene Wert für x wird in eine der beiden Ausgangsgleichungen eingesetzt, diese dann nach der Variablen **y** aufgelöst.	$x=1$ eingesetzt in (II): $3x+3y=9$ $3\cdot 1+3y=9$ $\Leftrightarrow 3+3y=9\,\vert -3$ $\Leftrightarrow 3y=6\,\vert :3$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y=2}}$
4.	Lösungsmenge:	$\underline{\underline{L=\{(1\vert 2)\}}}$
5.	Probe durch einsetzen	
	$(\mathrm{I})\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$ $(\mathrm{II})\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$	

Das Einsetzverfahren

	Lösungsschritte für das Einsetzverfahren Variante 1	Gleichungssystem $(\mathrm{I}) \quad 5x-2y=1$ $(\mathrm{II}) \quad 3x+3y=9$
1.	Gleichung **(I)** wird nach der Variablen **x** aufgelöst.	$(\mathrm{I})\ 5x-2y=1 \mid +2y$ $\Leftrightarrow 5x=2y+1 \mid :5$ $\Leftrightarrow x=\frac{2}{5}y+\frac{1}{5}$
2.	Den gefundenen Term der rechten Seite in Gleichung **(II)** einsetzen und nach **y** auflösen.	$x=\frac{2}{5}y+\frac{1}{5}$ eingesetzt in (II): $3x+3y=9$ $3\left(\frac{2}{5}y+\frac{1}{5}\right)+3y=9$ $\Leftrightarrow \frac{6}{5}y+\frac{3}{5}+3y=9 \mid -\frac{3}{5}$ $\Leftrightarrow \frac{6}{5}y+3y=9-\frac{3}{5}$ $\Leftrightarrow \frac{21}{5}y=\frac{42}{5} \mid \cdot 5$ $\Leftrightarrow 21y=42 \mid :21$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y=2}}$
3.	Der gefundene Wert für y wird in eine der beiden Ausgangsgleichungen eingesetzt, diese dann nach der Variablen **x** aufgelöst.	$y=2$ eingesetzt in (II): $3x+3y=9$ $3x+3\cdot 2=9$ $\Leftrightarrow 3x+6=9 \mid -6$ $\Leftrightarrow 3x=3 \mid :3$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}$
4.	Lösungsmenge:	$\underline{\underline{L=\{(1 \mid 2)\}}}$
5.	Probe durch einsetzen	
	$(\mathrm{I})\ 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$ $(\mathrm{II})\ 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$	

	Lösungsschritte für das Einsetzverfahren Variante 2	Gleichungssystem (I) $5x - 2y = 1$ (II) $3x + 3y = 9$
1.	Gleichung **(II)** wird nach der Variablen **y** aufgelöst.	$(II)\ 3x + 3y = 9 \mid -3x$ $\Leftrightarrow \quad 3y = 9 - 3x \mid :3$ $\Leftrightarrow \quad y = 3 - x$
2.	Den gefundenen Term der rechten Seite in Gleichung **(I)** einsetzen und nach **x** auflösen.	$y = 3 - x$ eingesetzt in $(I): 5x - 2y = 1$ $5x - 2(3 - x) = 1$ $\Leftrightarrow 5x - 6 + 2x = 1 \mid +6$ $\Leftrightarrow 7x = 7 \mid :7$ $\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 1}}$
3.	Der gefundene Wert für x wird in eine der beiden Ausgangsgleichungen eingesetzt, diese dann nach der Variablen **y** aufgelöst.	$x = 1$ eingesetzt in $(II): 3x + 3y = 9$ $3 \cdot 1 + 3y = 9$ $\Leftrightarrow 3 + 3y = 9 \mid -3$ $\Leftrightarrow \quad 3y = 6 \mid :3$ $\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 2}}$
4.	Lösungsmenge:	$\underline{\underline{L = \{(1 \mid 2)\}}}$
5.	Probe durch einsetzen	
	$(I)\ 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$ $(II)\ 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$	

Alle drei Verfahren mit ihren Varianten wurden auf ein bestimmtes Gleichungssystem angewendet. Wer sich die einzelnen Verfahren genauer anschaut, erkennt dass das Einsetzverfahren in der Variante 2 den geringsten Rechenaufwand erfordert.

Der Rechenaufwand für ein bestimmtes Verfahren hängt von dem zu lösenden Gleichungssystem ab. Deshalb sollte man zuerst überlegen, welches Verfahren sich mit dem geringstem Aufwand durchführen lässt. Dazu bedarf es aber einiger Übungen. Die folgenden Beispiele sollen eine kleine Hilfe dafür sein, dass geeignete Lösungsverfahren zu finden.

Beispiele für geeignete Lösungsverfahren.

Beispiel 1:

$(\mathrm{I})\quad y = 7x + 8$

$(\mathrm{II})\quad y = -2x - 1$

Gleichsetzverfahren:

$$
\begin{aligned}
& 7x + 8 = -2x - 1 \mid +2x \\
\Leftrightarrow\ & 9x + 8 = \quad -1 \mid -8 \\
\Leftrightarrow\ & 9x \quad = \quad -9 \mid : 9 \\
\Leftrightarrow\ & \underline{\underline{x = -1}}
\end{aligned}
$$

$x = -1$ eingesetzt in $(\mathrm{I})\ y = 7x + 8$

$$
\begin{aligned}
& y = 7 \cdot (-1) + 8 \\
\Leftrightarrow\ & y = -7 + 8 \\
\Leftrightarrow\ & \underline{\underline{y = 1}}
\end{aligned}
$$

Lösung: $L = \{(-1 \mid 1)\}$

Probe:

$(\mathrm{I})\quad y = 7x + 8 \Rightarrow y = 7 \cdot (-1) + 8$

$\Leftrightarrow y = -7 + 8 \Leftrightarrow y = 1\ (w)$

$(\mathrm{II})\quad y = -2x - 1 \Rightarrow y = -2 \cdot (-1) - 1$

$\Leftrightarrow y = 2 - 1 \Leftrightarrow y = 1\ (w)$

Beispiel 2:

$(\mathrm{I})\quad 2x + 4y = 8$

$(\mathrm{II})\quad 2x - 5y = 35$

Additionsverfahren:

$(\mathrm{I})\quad 2x + 4y = 8$

$(\mathrm{II})\quad 2x - 5y = 35 \mid \cdot (-1)$

$$
\left.
\begin{aligned}
(\mathrm{I})\quad & 2x + 4y = 8 \\
(\mathrm{II})\quad & -2x + 5y = -35
\end{aligned}
\right\} +
$$

$$
\begin{aligned}
& 9y = -27 \mid 9 \\
\Leftrightarrow\ & \underline{\underline{y = -3}}
\end{aligned}
$$

$y = 3$ eingesetzt in $(\mathrm{I})\ 2x + 4y = 8$

$$
\begin{aligned}
& 2x - 12 = 8 \mid +12 \\
\Leftrightarrow\ & 2x \quad = 20 \mid : 2 \\
\Leftrightarrow\ & \underline{\underline{x = 10}}
\end{aligned}
$$

Lösung: $L = \{(10 \mid -3)\}$

Probe:

$(\mathrm{I})\quad 2x + 4y = 8 \Rightarrow 2 \cdot 10 + 4 \cdot (-3) = 8$

$\Leftrightarrow 20 - 12 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8\ (w)$

$(\mathrm{II})\quad 2x - 5y = 35 \Rightarrow 2 \cdot 10 - 5 \cdot (-3) = 35$

$\Leftrightarrow 20 + 15 = 35 \Leftrightarrow 35 = 35\ (w)$

Beispiel 3:

$(\mathrm{I})\quad x + 2y = 5$

$(\mathrm{II})\quad -x + y = 1$

Einsetzverfahren:

(II) nach y auflösen

$$
\begin{aligned}
& -x + y = 1 \mid +x \\
\Leftrightarrow\ & \quad y = x + 1
\end{aligned}
$$

eingesetzt in $(\mathrm{I})\ x + 2y = 5$

$$
\begin{aligned}
& x + 2(x + 1) = 5 \\
\Leftrightarrow\ & x + 2x + 2 \quad = 5 \mid -2 \\
\Leftrightarrow\ & \quad 3x = 3 \mid : 3 \\
\Leftrightarrow\ & \quad \underline{\underline{x = 1}}
\end{aligned}
$$

$x = 1$ eingesetzt in $(\mathrm{I})\ x + 2y = 5$

$$
\begin{aligned}
& 1 + 2y = 5 \mid -1 \\
\Leftrightarrow\ & 2y = 4 \mid : 2 \\
\Leftrightarrow\ & \underline{\underline{y = 2}}
\end{aligned}
$$

Lösung: $L = \{(1 \mid 2)\}$

Probe:

$(\mathrm{I})\quad x + 2y = 5 \Rightarrow 1 + 4 = 5$

$\Leftrightarrow 5 = 5\ (w)$

$(\mathrm{II})\quad -x + y = 1 \Rightarrow -1 + 2 = 1 = 35$

$\Leftrightarrow 1 = 1\ (w)$

Beispiel 4:

$$(\mathrm{I})\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$

$$(\mathrm{II})\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$(\mathrm{I})\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$

$$(\mathrm{II})\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{I})\quad & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ (\mathrm{II})\quad & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{aligned}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$

$$\Leftrightarrow -5=y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

$y=-5$ eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2|-5)\}\ x,y\neq 0$

Probe:

$$(\mathrm{I})\ \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2\Leftrightarrow 2=2\ (\mathrm{w})$$

$$(\mathrm{II})\ \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$

$$\Leftrightarrow 6-2=4\Leftrightarrow 4=4\ (\mathrm{w})$$

Bemerkung:
Das Gleichungssystem besteht aus Bruchtermen. Da der Nenner nicht Null werden darf, ist die Definitionsmenge anzugeben. Ein solches Gleichungssystem ist nicht linear.

Zeichnerisches Verfahren

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{I}) & x-y=-2 \\ (\mathrm{II}) \wedge & -2x-y=1 \end{array}$$

Beide Gleichungen werden nach y aufgelöst.

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{I}) & x-y=-2 \mid +y \\ (\mathrm{II}) & -2x-y=\;1 \mid +y \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{I}) & x=-2+y \mid +2 \\ (\mathrm{II}) & -2x=\;1+y \mid -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{I}) & x+2=y \Leftrightarrow y=x+2 \\ (\mathrm{II}) & -2x-1=\;y \Leftrightarrow y=-2x-1 \end{array}$$

In jede Gleichung werden für x Zahlen eingesetzt. Daraus werden Wertepaare gebildet.

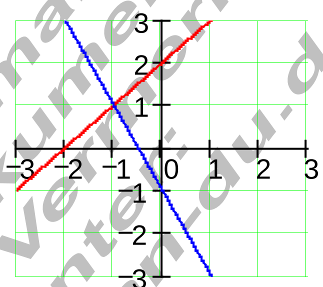
x	–2	–1	0	1
y_I	0	1	2	3
y_{II}	3	1	–1	–3

$L_I = \{(-2 \mid 0);(-1 \mid 1);(0 \mid 2);(1 \mid 3);...\}$

$L_{II} = \{(-2 \mid 3);(-1 \mid 1);(0 \mid -1);(1 \mid -3);...\}$

Für jede Gleichung entsprechen die Wertepaare deren Lösungsmenge. Trägt man diese in ein Koordinatensystem ein, so erhält man zwei Geraden. Im Schnittpunkt beider Geraden liegt die gemeinsame Lösung beider Gleichungen.

Lösungsmenge : $L = \{(-1 \mid 1)\}$



Das zeichnerische Verfahren veranschaulicht den geometrischen Zusammenhang zwischen Gleichungen und Geraden. Als Lösungsverfahren ist es meist ungeeignet, da die Koordinaten des gemeinsamen Schnittpunktes oft nur ungenau aus der Grafik abgelesen werden können.

<u>Gleichungssysteme ohne eindeutige Lösung.</u>

Die zeichnerische Lösung veranschaulicht den geometrischen Zusammenhang zwischen Gleichungen und Geraden.
Zwei Geraden können unterschiedliche Lagen zueinander haben.

- Sie können sich in einem Punkt schneiden, dann gibt es, wie obiges Beispiel veranschaulicht, für die beiden linearen Gleichungen genau eine Lösung.
- Sie können parallel zueinander verlaufen, dann gibt es keinen Punkt, den beide Geraden miteinander haben. Die dazugehörigen Gleichungen dürften demzufolge keine Lösung haben.
- Sie können aufeinander liegen, also identisch sein, dann würde jeder Punkt der einen Geraden auch ein Punkt der anderen sein. Die dazugehörigen Gleichungen dürften demzufolge unendlich viele Lösungen haben.

Beispiel 1:

$$\begin{array}{ll}(\mathrm{I}) & 10x+4y=4 \\ (\mathrm{II}) & 5x+2y=1 \mid \cdot(-2) \\ \hline (\mathrm{I}) & 10x+4y=4 \\ (\mathrm{II}) & -10x-4y=-2 \mid \\ \hline & 0=2 \rightarrow \text{falsche Aussage} \Rightarrow L=\{\ \}\end{array}$$ (I) und (II) addiert (+)	Der Lösungsansatz führt zu einer falschen Aussage. Das bedeutet, es existiert keine Lösung zu dem Gleichungssystem. Anschaulich bedeutet das, die beiden Geraden verlaufen parallel zueinander und haben keinen Punkt gemeinsam.

Beispiel 2:

$$\begin{array}{ll}(\mathrm{I}) & 10x+4y=2 \\ (\mathrm{II}) & 5x+2y=1 \mid \cdot(-2) \\ \hline (\mathrm{I}) & 10x+4y=2 \\ (\mathrm{II}) & -10x-4y=-2 \mid \\ \hline & 0=0 \rightarrow \text{wahre Aussage}\end{array}$$ (I) und (II) addiert (+)	Bei der Addition nach der Äquivalenzumformung heben sich Gleichung (I) und Gleichung(II) gegenseitig auf, das bedeutet sie sind identisch. Jedes Zahlenpaar, das (I) erfüllt, erfüllt folglich auch (II). Anschaulich bedeutet das, die beiden Geraden liegen aufeinander und haben jeden Punkt gemeinsam.