Logarithmen und Logarithmengesetze

Wir betrachten die Gleichung $5^3 = 125$

Auf der linken Seite steht eine Potenz mit der Basis 5 und dem Exponenten 3.
Auf der rechten Seite der zugehörige Potenzwert 125.
Ersetzt man Basis, Exponent oder Potenzwert durch die Variable x, so erhält man folgende Problemstellungen.

$5^3 = x$ Der Potenzwert wird gesucht	Lösung durch Potenzieren $x = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \quad \Rightarrow L = \{125\}$
$x^3 = 125$ Die Basis wird gesucht	Lösung durch Wurzelziehen $x = \sqrt[3]{125} = 5 \quad L = \{5\}$
$5^x = 125 \quad (\text{Exponentialgleichung})$ Der Exponent wird gesucht	Lösung ?

Die Bestimmung des Exponenten heißt logarithmieren.
Man sagt: Es ist x gleich Logarithmus 125 zur Basis 5 und schreibt kurz:

$x = \log_5(125)$ Wir können die Gleichung $5^x = 125$ zunächst durch probieren lösen:

$5^x = 125 \Leftrightarrow x = \log_5(125) \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow L = \{3\}$ denn $5^3 = 125$

Definition	$x = \log_a(b) \Leftrightarrow a^x = b \qquad \text{für } x \in \mathbb{R};\, b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\};\, a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0;1\}$ Der Logarithmus ist der Exponent (x), mit dem die Basis (a) potenziert wird, um den Potenzwert (b) zu erhalten. Man sagt: x ist der Logarithmus von b zur Basis a.

Beispiele:

$\log_2(8) = 3$ denn $2^3 = 8$

$\log_4(16) = 2$ denn $4^2 = 16$

$\log_5(625) = 4$ denn $5^4 = 625$

$\log_{10}(1000) = 3$ denn $10^3 = 1000$

$\log_a(1) = 0$ denn $a^0 = 1$

$\log_{10}(0{,}1) = -1$ denn $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$\log_4(2) = \frac{1}{2}$ denn $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

$\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ denn $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

Logarithmen zu gebräuchlichen Basen.

Mit dem Taschenrechner lassen sich Logarithmen zur Basis 10 und solche zur Basis e (Natürlicher Logarithmus) berechnen.
Natürliche Wachstumsvorgänge werden oft durch mathematische Terme, in denen Potenzen der Zahl e enthalten sind, beschrieben.
Der natürliche Logarithmus (Logarithmus Naturalis) wird in Naturwissenschaft und Technik häufig verwendet. Deshalb hat man für solche Logarithmen besondere Schreibweisen eingeführt.

$\log_{10}(a) := \lg(a)$ Logarithmus zur Basis 10 (dekadischer Logarithmus)

$\log_e(a) := \ln(a)$ Logarithmus zur Basis e (natürlicher Logarithmus)

Sonderfälle

Aus der Definition des Logarithmus $x = \log_a(b) = a^x = b$ folgt unmittelbar:

$\log_a(a) = 1$ denn $1 = \log_a(a) \Leftrightarrow a^1 = a$ für den Logarithmus zur Basis a

$\lg(10) = 1$ denn $1 = \lg \Leftrightarrow 10^1 = 10$ für den dekadischen Logarithmus

$\ln(e) = 1$ denn $1 = \ln \Leftrightarrow e^1 = e$ für den natürlichen Logarithmus

$\log_a(1) = 0$ denn $0 = \log_a(1) \Leftrightarrow a^0 = 1$ für den Logarithmus zur Basis a

$\lg(1) = 0$ denn $0 = \lg \Leftrightarrow 10^0 = 1$ für den dekadischen Logarithmus

$\ln(1) = 0$ denn $0 = \ln \Leftrightarrow e^0 = 1$ für den natürlichen Logarithmus

Logarithmus im Exponenten.

Vielfach sind für Termumformungen folgende Beziehungen nützlich:

$x = \log_a(b) \Leftrightarrow a^x = b \Leftrightarrow a^{\log_a(b)} = b$ Zahlenbeispiel: $2 = a^{\log_a(2)}$

$x = \lg(b) \Leftrightarrow 10^x = b \Leftrightarrow 10^{\lg(b)} = b$ Zahlenbeispiel: $5 = 10^{\lg(5)}$

$x = \ln(b) \Leftrightarrow e^x = b \Leftrightarrow e^{\ln(b)} = b$ Zahlenbeispiel: $9 = e^{\ln(9)}$

Logarithmengesetze

Regel	Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren. $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$

Beispiel:

$\lg(500) = \lg(5 \cdot 100) = \lg(5) + \lg(100) = \lg(5) + 2$

Regel	Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen von Dividend (Zähler) und Divisor (Nenner). $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$

Beispiel:

$$\log_7\left(\frac{343}{7}\right) = \log_7(343) - \log_7(7) = \log_7(7)^3 - \log_7(7)^1 = 3 - 1 = 2$$

Regel	Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Basis multipliziert mit dem Exponenten. $\log_a\left(b^c\right) = c \cdot \log_a(b)$

Beispiel:

$$\log_3(3)^5 = 5 \cdot \log_3(3)^1 = 5 \cdot 1 = 5$$

Da jede Wurzel als Potenz mit gebrochenem Exponenten geschrieben werden kann, gilt auch für Wurzeln die Potenzregel.

Für Wurzeln gilt: $\log_a\left(\sqrt[c]{b}\right) = \log_a(b)^{\frac{1}{c}} = \frac{1}{c} \cdot \log_a b$

Beispiel:

$$\ln\left(\sqrt[3]{e}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\ln(e) = \frac{1}{3}$$

Umrechnung von einem Logarithmensystem in ein anderes.

Da mit dem Taschenrechner nur dekadische und natürliche Logarithmen berechenbar sind, ist es von Fall zu Fall notwendig Logarithmen umzurechnen.

Regel	$\log_a(b) = \frac{\lg(b)}{\lg(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$

Beispiel:

$$\log_3(5) = \frac{\lg(5)}{\lg(3)} \approx 1{,}4649735 \quad \text{oder} \quad \log_3(5) = \frac{\ln(5)}{\ln(3)} \approx 1{,}4649735$$

Beweis:

$$\left.\begin{array}{l} x = \log_a(b) \Leftrightarrow a^x = b \\ y = \log_c(b) \Leftrightarrow c^y = b \end{array}\right| \Leftrightarrow a^x = c^y \mid \log_c(\ )$$

$$\Leftrightarrow \log_c\left(a^x\right) = \log_c\left(c^y\right) \Leftrightarrow x \cdot \log_c(a) = y \cdot \underbrace{\log_c(c)}_{1} \Leftrightarrow x \cdot \log_c(a) = y$$

Für x und y die Logarithmen einsetzen und nach $\log_a(b)$ umstellen

$$\log_a(b) \cdot \log_c(a) = \log_c(b) \mid : \log_c(a)$$

$$\Leftrightarrow \log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)} = \frac{\lg(b)}{\lg(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

Beispiele zur Anwendung der Logarithmengesetze:

Beispiel 1:
Der Bruchterm soll zur Basis 10 logarithmiert werden.

$$\frac{a^2 \cdot b \cdot \sqrt[3]{c}}{d \cdot \sqrt{e^3}}$$

$$\lg\left(\frac{a^2 \cdot b \cdot \sqrt[3]{c}}{d \cdot \sqrt{e^3}}\right) = \lg\left(\frac{a^2 \cdot b \cdot c^{\frac{1}{3}}}{d \cdot e^{\frac{3}{2}}}\right) = 2 \cdot \lg(a) + \lg(b) + \frac{1}{3} \cdot \lg(c) - \lg(d) - \frac{3}{2} \cdot \lg(e)$$

Beispiel 2:
Die Logarithmenterme sollen zu einem Logarithmenterm zusammengefasst werden.

$$\ln x - \frac{1}{2}\ln y + \frac{4}{5}\ln z$$

$$\ln(x) - \frac{1}{2} \cdot \ln(y) + \frac{4}{5} \cdot \ln(z) = \ln\left(\frac{x \cdot z^{\frac{4}{5}}}{y^{\frac{1}{2}}}\right) = \ln\left(\frac{x \cdot \sqrt[5]{z^4}}{\sqrt{y}}\right)$$

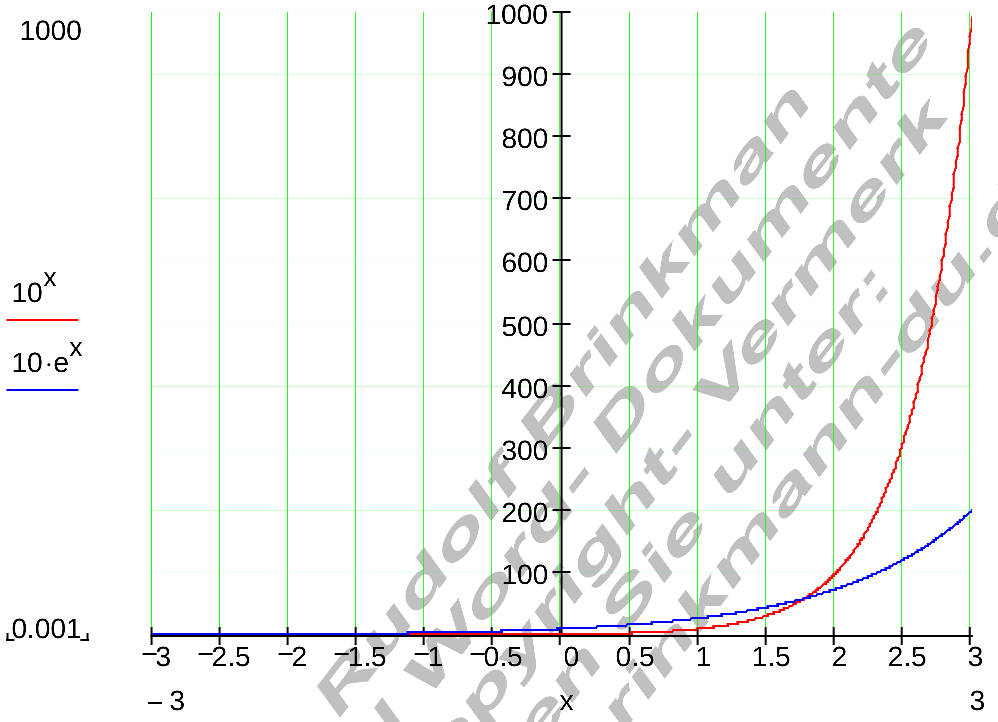
Beispiel 3
Umformungen mit Logarithmus im Exponenten.

$$2^x = e^{\ln\left(2^x\right)} = e^{\ln(2) \cdot x} \qquad 4^x = 10^{\lg\left(4^x\right)} = 10^{\lg(4) \cdot x}$$

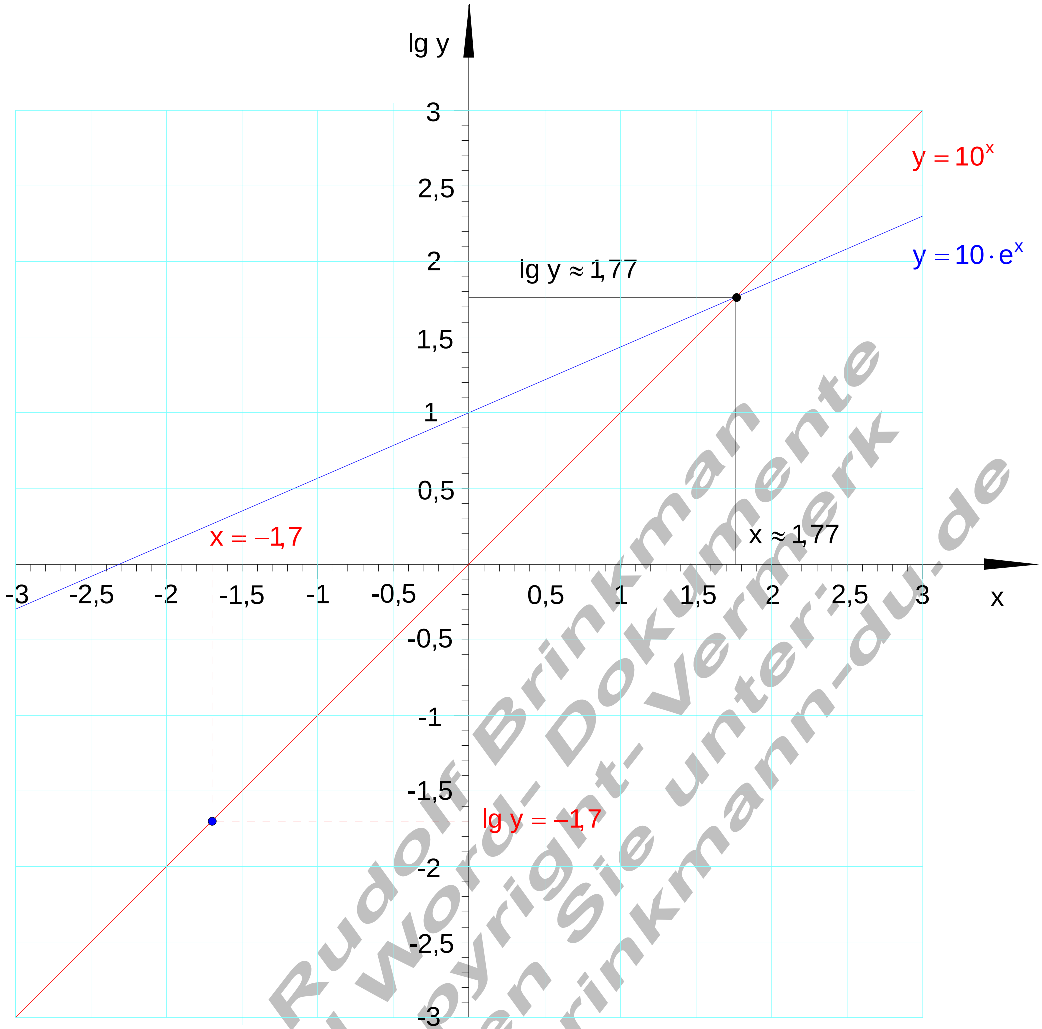
$$e^{\ln(10) \cdot x} = e^{\ln\left(10^x\right)} = 10^x \qquad 10^{\lg(e) \cdot x} = 10^{\lg\left(e^x\right)} = e^x$$

Logarithmische Skalierungen

Beispiel:
Die Graphen der Funktion $f(x) = 10^x$ und $g(x) = 10 \cdot e^x$ sollen in einem Koordinatensystem dargestellt werden.



Ein Nachteil dieser Darstellung ist, dass Funktionswerte für kleine x – Werte nicht mehr abgelesen werden können.



Bei einer logarithmischen Skalierung der y – Achse werden die Graphen zu Geraden. Auf der y – Achse werden die Logarithmen der Funktionswerte abgetragen.

$y = 10^x \Leftrightarrow \lg(y) = \lg\left(10^x\right) = x \cdot \lg(10) = x$

$\Rightarrow \lg(y) = x$ Gerade durch den Ursprung mit der Steigung 1

$y = 10 \cdot e^x \Leftrightarrow \lg(y) = \lg\left(10 \cdot e^x\right) = \lg(10) + x \cdot \lg(e) = 1 + x \cdot \lg(e)$

$\Rightarrow \lg(y) = \lg(e) \cdot x + 1$ Gerade mit der Steigung $\lg(e)$

Die tatsächlichen Werte müssen berechnet werden.

Der Wert $-1{,}7$ auf der y – Achse bedeutet $\lg(y) = -1{,}7 \Rightarrow y = 10^{-1{,}7} \approx 0{,}02$

Der Schnittpunkt des Graphen der Funktionen $f(x) = 10^x$ mit dem der Funktion $g(x) = 10 \cdot e^x$ wird bei logarithmischer Skalierung der y – Achse auf den Schnitt zweier Geraden zurückgeführt.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 10^x = 10 \cdot e^x$ (Exponentialgleichung)

Lösung durch logarithmieren:

$$\Rightarrow \lg\left(10^x\right) = \lg\left(10 \cdot e^x\right) \Leftrightarrow x \cdot \lg(10) = \lg(10) + x \cdot \lg(e) \Leftrightarrow x \cdot 1 = 1 + x \cdot \lg(e)$$

$$\Leftrightarrow x - x \cdot \lg(e) = 1 \Leftrightarrow x\left(1 - \lg(e)\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1 - \lg(e)} \approx 1{,}77$$

$$\lg(y) = \lg\left(10^x\right) = x \cdot \lg(10) = x \approx 1{,}77$$

$$\lg(y) = \lg\left(10 \cdot e^x\right) = \lg(10) + x \cdot \lg(e) = 1 + x \cdot 0{,}434 \approx 1{,}77$$

$f(x) \approx 10^{1{,}77} \approx 58{,}88 \Rightarrow S(1{,}77 \mid 58{,}88)$ Schnittpunkt beider Graphen

Kontrolle:

$g(x) \approx 10 \cdot e^{1{,}77} \approx 58{,}70$ (Abweichungen durch Rundung)

Beispiel:

Nach Gabe eines medizinischen Präparates stirbt ein Bakterienstamm nach der Funktion $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ ab.

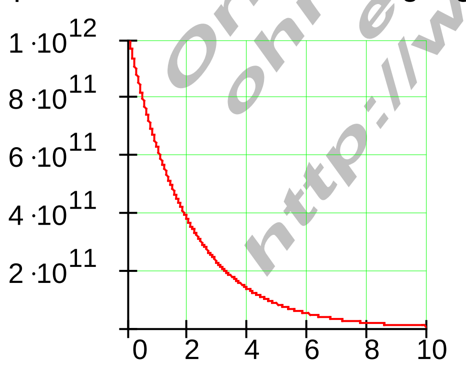
Dabei bedeuten: $N(t)$ Anzahl der Bakterien nach der Zeit t

N_0 Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt $t = 0$

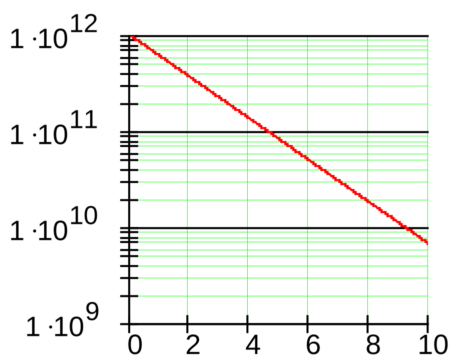
λ Abklingkonstante

Die Zeit, nach der die Hälfte der Bakterien abgestorben ist, wird Halbwertzeit τ genannt.

Graphisch lässt sich dieser Vorgang wir folgt darstellen:



Lineare Skalenteilung



Logarithmische Skalenteilung

Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der Abklingkonstanten λ und der Halbwertszeit τ dar.

Halbwertszeit: $N(\tau)=\frac{1}{2}\cdot N_0$ und $N(\tau)=N_0\cdot e^{-\lambda\cdot\tau}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot N_0=N_0\cdot e^{-\lambda\cdot\tau} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=e^{-\lambda\cdot\tau}$

$$
\begin{aligned}
& e^{-\lambda\cdot\tau} &&= \frac{1}{2} && |\,\text{logarithmieren}\\
\Leftrightarrow\; & \ln\left(e^{-\lambda\cdot\tau}\right) &&= \ln\left(\frac{1}{2}\right) && |\,\text{umformen}\\
\Leftrightarrow\; & -\lambda\cdot\tau\cdot\underbrace{\ln e}_{1} &&= \ln(1)-\ln(2) && |\cdot(-1)\\
\Leftrightarrow\; & \lambda\cdot\tau &&= \ln(2)-\ln(1) && |:\tau\\
\Leftrightarrow\; & \lambda &&= \frac{\ln(2)-\underbrace{\ln(1)}_{0}}{\tau}\\
\Leftrightarrow\; & \lambda &&= \frac{\ln(2)}{\tau}
\end{aligned}
$$

Damit kann man auch schreiben: $\underline{\underline{N(t)=N_0\cdot e^{-\frac{\ln 2}{\tau}\cdot t}}}$

Bemerkung: Die Halbwertszeit ist die Zeit, in der sich ein exponentiell mit der Zeit abnehmender Wert halbiert hat.

Zusammenfassung der wichtigsten Logarithmengesetze

Logarithmus zur Basis a

$x=\log_a(b)\Leftrightarrow a^x=b$	$\log_a(b\cdot c)=\log_a(b)+\log_a(c)$
$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a(b)-\log_a(c)$	$\log_a\left(b^c\right)=c\cdot\log_a(b)$
$\log_a(a)=1$ $\qquad \log_a(1)=0$	$b=a^{\log_a(b)}$ $\qquad b^x=a^{x\cdot\log_a(b)}$

Logarithmus zur Basis 10 (Zehner- oder dekadischer Logarithmus) [LOG]-Taste

$x=\lg(b)\Leftrightarrow 10^x=b$	$\lg(b\cdot c)=\lg(b)+\lg(c)$
$\lg\left(\frac{b}{c}\right)=\lg(b)-\lg(c)$	$\lg\left(b^c\right)=c\cdot\lg(b)$
$\lg(10)=1$ $\qquad \lg(1)=0$	$b=10^{\lg(b)}$ $\qquad b^x=10^{x\cdot\lg(b)}$

Logarithmus zur Basis e (Natürlicher Logarithmus oder Logarithmus Naturalis)

$x = \ln(b) \Leftrightarrow e^x = b$	$\ln(b \cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$
$\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$	$\ln(b^c) = c \cdot \ln(b)$
$\ln(e) = 1$ $\qquad \ln(1) = 0$	$b = e^{\ln(b)}$ $\qquad b^x = e^{x \cdot \ln(b)}$

Umrechnung von einem Logarithmensystem in ein anderes.

$\log_a(b) = \frac{\lg(b)}{\lg(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$	$\log_3(5) = \frac{\lg(5)}{\lg(3)} = \frac{\ln(5)}{\ln(3)} \approx 1{,}4649735$