

Lösungen Logarithmus IV

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse		
a)	$\log_3 (x) = 3 \Leftrightarrow x = 27$	b)	$\log_x (3) = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
c)	$\log_2 (5) = x \Leftrightarrow x = \frac{\ln (5)}{\ln (2)} \approx 2,322$	d)	$\log_4 (x - 1) = -1,5 \Leftrightarrow x = \frac{9}{8}$
e)	$\log_x (3) = 0 \Leftrightarrow x = \{ \}$	f)	$\lg (x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{10}\sqrt{10}$
g)	$\ln (x) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$	h)	$\lg (2x) = 0,5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{10} \approx 1,581$
i)	$\log_x (4) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 64$	j)	$\log_4 (x) + \log_4 (2) = \log_4 (12) \Leftrightarrow x = 6$
k)	$\log_3 (x) - \log_3 (5) = 3 \Leftrightarrow x = 135$	l)	$\log_5 (12) = x \Leftrightarrow x = \frac{\ln (12)}{\ln (5)} \approx 1,544$

E2	Ergebnisse		
a)	$\log (xy)=\log (x)+\log (y)$	b)	$\log \left(\frac{1}{ab}\right)=-\log (a)-\log (b)$
c)	$\log (3x-3)-\log (x-1)=\log (3)$	d)	$\log \left(\sqrt{2xy}\right)=\frac{1}{2}[\log (2)+\log (x)+\log (y)]$
e)	$\ln (u)+2 \ln (v)=\ln \left(u v^2\right)$	f)	$-\lg \left(\frac{1}{u}\right)=\lg (u)$
g)	$\lg (x)-\lg (y)+\frac{1}{2} \lg (z)=\lg \left(\frac{x \sqrt{z}}{y}\right)$	h)	$\ln \left(e^2\right)-3 \ln \left(\frac{e}{2}\right)=3 \ln (2)-1$
i)	$\ln \left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\ln (1-x)-\ln (1+x)$	j)	$\log \left(x^3\right)-\log (x)=2 \log (x)$
k)	$\lg (uv)+\lg \left(\frac{1}{v^2}\right)=\lg (u)-\lg (v)$	l)	$\log \left(\sqrt{x}\right)+1,5 \log (x)=2 \log (x)$

E3	Ergebnisse
a)	$\ln(2e^2) + \ln\left(\frac{e}{2}\right) = 3$
b)	$\ln\left(\frac{4}{3}u\right) - \ln\left(\frac{4}{u}\right) = 2\ln(u) - \ln(3); u > 0$
c)	$\ln(1-x^2) - \ln(1+x) = \ln(1-x)$
d)	$\ln(x) - \ln(4) + \ln\left(\frac{4y}{x}\right) = \ln(y)$
e)	$\ln\left(\frac{1}{a^2}\right) - \ln(2a) - \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -2\ln(a) - \ln(2)$
f)	$\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right) - \ln(x+1) = -\ln(2+x)$

E4	Ergebnisse					
	a)	$\log_3(4) = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \quad (W)$	b)	$\log_3(4) = \frac{\lg(3)}{\lg(4)} \quad (F)$	c)	$\log_3(4) = \frac{\lg(4)}{\lg(3)} \quad (W)$

E5	Ergebnis
	$\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x) = \frac{1}{8}$$\ln(x^2) = 2 \ln(x) = \frac{1}{2}$ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) = -\frac{1}{4}$$\ln^2(x) = (\ln x)^2 = \frac{1}{16}$

E6	Ergebnis	
	$\lg(4000) = \lg(4 \cdot 1000) = \lg(4) + 3$	1. Logarithmengesetz
	$\lg(0,25) = \lg(1) - \lg(4) = -\lg(4)$	2. Logarithmengesetz

E7	Ergebnis						
	$e^{2\ln(u)}$	$e^{\ln\left(\frac{u}{2}\right)}$	$\frac{1}{2}e^{\frac{\ln(u)}{2}}$	$e^{-\frac{\ln(u)}{3}}$	$2e^{\ln(u^2)}$	$e^{\ln(u)-1}$	$e^{\ln(t-1)}$
	u^2	$\frac{u}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{u}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{u}}$	$2u^2$	$u \cdot e^{-1}$	$u-1$

Ausführliche Lösungen:

A1 Aufgabe			
Bestimmen Sie den Wert der Variablen x.			
a)	$\log_3(x) = 3$	b)	$\log_x(3) = -2$
d)	$\log_4(x-1) = -1,5$	e)	$\log_x(3) = 0$
g)	$\ln(x) = -1$	h)	$\lg(2x) = 0,5$
j)	$\log_4(x) + \log_4(2) = \log_4(12)$	k)	$\log_3(x) - \log_3(5) = 3$
		l)	$\log_5(12) = x$

A1 Ausführliche Lösungen	
a)	Definition: $\log_a(b) = c \Leftrightarrow a^c = b$ $\log_3(x) = 3$ $\Leftrightarrow 3^3 = x$ $\Leftrightarrow x = 27$
b)	$\log_x(3) = -2 \Leftrightarrow x^{-2} = 3$ $\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = 3 \mid \cdot x^2 \Leftrightarrow 1 = 3x^2 \mid : 3$ $\Leftrightarrow \frac{1}{3} = x^2 \mid \sqrt{} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{3}} = x $ $ x = \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$ $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ da $x > 0$ (Definition)

A1 Ausführliche Lösungen	
c)	$\log_2(5) = x \Leftrightarrow 2^x = 5 \mid \ln()$ $\Leftrightarrow \ln(2^x) = \ln(5)$ $\Leftrightarrow x \cdot \ln(2) = \ln(5) \mid : \ln(2)$ $\Leftrightarrow x = \frac{\ln(5)}{\ln(2)} \approx 2,322$
d)	$\log_4(x-1) = -1,5 \Leftrightarrow 4^{-\frac{3}{2}} = x-1$ $\Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} \mid +1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\left(2^2\right)^{\frac{3}{2}}} + 1$ $\Leftrightarrow x = \frac{1}{(2^3)} + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8} + \frac{8}{8} \Leftrightarrow x = \frac{9}{8}$

A1 Ausführliche Lösungen	
e)	$\log_x(3) = 0 \Leftrightarrow x^0 = 3$ (Widerspruch) denn $x^0 = 1$ $\Rightarrow x = \{ \}$
f)	$\lg(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 10^{-\frac{1}{2}} = x$ $\Leftrightarrow x = \frac{1 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{10} \sqrt{10}$

A1 Ausführliche Lösungen	
g)	$\ln(x) = -1 \Leftrightarrow e^{-1} = x$ $\Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \approx 0,368$
h)	$\lg(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 10^{\frac{1}{2}} = 2x \mid : 2$ $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \cdot 10^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \approx 1,581$

A1 Ausführliche Lösungen	
i)	$\log_x(4) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{3}} = 4 \quad ^3$ $\Leftrightarrow x = 4^3 \Leftrightarrow x = 64$
j)	$\log_4(x) + \log_4(2) = \log_4(12)$ $\Leftrightarrow \log_4(2x) = \log_4(12)$ $\Leftrightarrow 2x = 12 \quad :2 \Leftrightarrow x = 6$

A1 Ausführliche Lösungen	
k)	$\log_3(x) - \log_3(5) = 3$ $\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x}{5}\right) = 3 \Leftrightarrow 3^3 = \frac{x}{5} \quad \cdot 5$ $\Leftrightarrow 5 \cdot 3^3 = x \Leftrightarrow x = 135$
l)	$\log_5(12) = x \Leftrightarrow 5^x = 12 \quad \ln(\quad)$ $\Leftrightarrow \ln(5^x) = \ln(12)$ $\Leftrightarrow x \cdot \ln(5) = \ln(12) \quad : \ln(5)$ $\Leftrightarrow x = \frac{\ln(12)}{\ln(5)} \approx 1,544$

A2 Aufgabe			
Formen Sie um.			
a)	$\log(xy)$	b)	$\log\left(\frac{1}{ab}\right)$
d)	$\log(\sqrt{2xy})$	e)	$\ln(u) + 2\ln(v)$
g)	$\lg(x) - \lg(y) + \frac{1}{2}\lg(z)$	h)	$\ln(e^2) - 3\ln\left(\frac{e}{2}\right)$
j)	$\log(x^3) - \log(x)$	k)	$\lg(uv) + \lg\left(\frac{1}{v^2}\right)$
		l)	$\log(\sqrt{x}) + 1,5\log(x)$

A2 Ausführliche Lösungen	
a)	$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
b)	$\log\left(\frac{1}{ab}\right) = \log(1) - \log(ab)$ $= -[\log(a) + \log(b)]$

A2 Ausführliche Lösungen	
c)	$\log(3x-3) - \log(x-1)$ $= \log\left(\frac{3x-3}{x-1}\right) = \log\left[\frac{3(x-1)}{x-1}\right]$ $= \log(3)$
d)	$\log(\sqrt{2xy}) = \log\left[(2xy)^{\frac{1}{2}}\right]$ $= \frac{1}{2}[\log(2) + \log(x) + \log(y)]$

A2 Ausführliche Lösungen	
e)	$\ln(u) + 2\ln(v) = \ln(u) + \ln(v^2)$ $= \ln(uv^2)$
f)	$-\lg\left(\frac{1}{u}\right) = -[\lg(1) - \lg(u)]$ $= -[0 - \lg(u)] = \lg(u)$

A2 Ausführliche Lösungen	
g)	h)
$\lg(x) - \lg(y) + \frac{1}{2}\lg(z)$ $= \lg\left(\frac{x}{y}\right) + \lg\left(z^{\frac{1}{2}}\right) = \lg\left(\frac{x\sqrt{z}}{y}\right)$	$\ln(e^2) - 3\ln\left(\frac{e}{2}\right) = 2\ln(e) - 3[\ln(e) - \ln(2)]$ $= 2 \cdot 1 - 3[1 - \ln(2)] = 2 - 3 + 3\ln(2)$ $= 3\ln(2) - 1$

A2 Ausführliche Lösungen	
i)	j)
$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ $= \ln(1-x) - \ln(1+x)$	$\log(x^3) - \log(x) = \log\left(\frac{x^3}{x}\right)$ $= \log(x^2) = 2\log(x)$

A2 Ausführliche Lösungen	
k)	l)
$\lg(uv) + \lg\left(\frac{1}{v^2}\right) = \lg\left(uv \cdot \frac{1}{v^2}\right)$ $= \lg\left(\frac{u}{v}\right) = \lg(u) - \lg(v)$	$\log(\sqrt{x}) + 1,5\log(x) = \log\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{3}{2}\log(x)$ $= \frac{1}{2}\log(x) + \frac{3}{2}\log(x) = 2\log(x)$

A3 Aufgabe			
Vereinfachen Sie.			
a)	b)	c)	
$\ln(2e^2) + \ln\left(\frac{e}{2}\right)$	$\ln\left(\frac{4}{3}u\right) - \ln\left(\frac{4}{u}\right); u > 0$	$\ln(1-x^2) - \ln(1+x)$	
d)	e)	f)	
$\ln(x) - \ln(4) + \ln\left(\frac{4y}{x}\right)$	$\ln\left(\frac{1}{a^2}\right) - \ln(2a) - \ln\left(\frac{1}{a}\right)$	$\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right) - \ln(x+1)$	

A3 Ausführliche Lösungen	
a)	b)
$\ln(2e^2) + \ln\left(\frac{e}{2}\right)$ $= \ln(2) + \ln(e^2) + \ln(e) - \ln(2)$ $= 2\ln(e) + \ln(e)$ $= 2 + 1 = 3$	$\ln\left(\frac{4}{3}u\right) - \ln\left(\frac{4}{u}\right); u > 0$ $= \ln\left(\frac{4u}{3}\right) = \ln\left(\frac{4u \cdot u}{3 \cdot 4}\right) = \ln\left(\frac{u^2}{3}\right)$ $= \ln(u^2) - \ln(3) = 2\ln(u) - \ln(3)$

A3 Ausführliche Lösungen	
c)	d)
$\ln(1-x^2) - \ln(1+x)$ $= \ln\left(\frac{1-x^2}{1+x}\right) = \ln\left[\frac{(1-x)(1+x)}{1+x}\right]$ $= \ln(1-x)$	$\ln(x) - \ln(4) + \ln\left(\frac{4y}{x}\right)$ $= \ln\left(\frac{x}{4}\right) + \ln\left(\frac{4y}{x}\right) = \ln\left(\frac{x}{4} \cdot \frac{4y}{x}\right) = \ln(y)$

A3	Ausführliche Lösungen	
e)	$\ln\left(\frac{1}{a^2}\right) - \ln(2a) - \ln\left(\frac{1}{a}\right)$ $= \ln\left(\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{2a} \cdot a\right) = \ln\left(\frac{1}{2a^2}\right)$ $= \ln(1) - \ln(2a^2) = -[\ln(2) + 2\ln(a)]$ $= -2\ln(a) - \ln(2)$	f) $\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right) - \ln(x+1)$ $= \ln\left(\frac{1+x}{2+x} \cdot \frac{1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2+x}\right)$ $= \ln(1) - \ln(2+x)$ $= -\ln(2+x)$

A4	Aufgabe		
	Entscheiden Sie.		
a)	$\log_3(4) = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}$	b)	$\log_3(4) = \frac{\lg(3)}{\lg(4)}$
		c)	$\log_3(4) = \frac{\lg(4)}{\lg(3)}$

A4	Ausführliche Lösungen	
a)	$\log_3(4) = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}$ ist wahr , denn $\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$	
b)	$\log_3(4) = \frac{\lg(3)}{\lg(4)}$ ist falsch , denn $\log_a(b) = \frac{\lg(b)}{\lg(a)}$	
c)	$\log_3(4) = \frac{\lg(4)}{\lg(3)}$ ist wahr , denn $\log_a(b) = \frac{\lg(b)}{\lg(a)}$	

A5	Aufgabe	
	Gegeben ist $\ln(x) = 0,25$. Bestimmen Sie damit: $\ln(\sqrt{x})$; $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$; $\ln(x^2)$; $\ln^2(x)$	

A5	Ausführliche Lösungen	
	$\ln(x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{4}} = x$	
	$x = e^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \ln(\sqrt{x}) = \ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\left[\left(e^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \ln\left(e^{\frac{1}{8}}\right) = \frac{1}{8}\ln(e) = \frac{1}{8}$	
	$x = e^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}\right) = \ln\left(e^{-\frac{1}{4}}\right) = -\frac{1}{4}\ln(e) = -\frac{1}{4}$	
	$x = e^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \ln(x^2) = \ln\left[\left(e^{\frac{1}{4}}\right)^2\right] = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(e) = \frac{1}{2}$	
	$x = e^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \ln^2(x) = \ln(x) \cdot \ln(x) = \ln\left(e^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \ln\left(e^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{4}\ln(e) \cdot \frac{1}{4}\ln(e) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$	

A6	Aufgabe
	Der Taschenrechner liefert $\lg(4)$. Bestimmen Sie ohne weitere Verwendung des Taschenrechners $\lg(4000)$ und $\lg(0,25)$. Welches Gesetz wird dabei verwendet?

A6	Ausführliche Lösung
	$\lg(4) \approx 0,602 \Rightarrow \lg(4000) = \lg(4 \cdot 1000) = \lg(4 \cdot 10^3) = \lg(4) + 3\lg(10) = \lg(4) + 3$
	$\lg(0,25) = \lg\left(\frac{1}{4}\right) = \lg(1) - \lg(4) = -\lg(4)$

A7	Aufgabe													
	Bestimmen Sie.													
	<table><tr><td>$e^{2\ln(u)}$</td><td>$e^{\ln\left(\frac{u}{2}\right)}$</td><td>$\frac{1}{2}e^{\frac{\ln(u)}{2}}$</td><td>$e^{-\frac{\ln(u)}{3}}$</td><td>$2e^{\ln(u^2)}$</td><td>$e^{\ln(u)-1}$</td><td>$e^{\ln(u-1)}$</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	$e^{2\ln(u)}$	$e^{\ln\left(\frac{u}{2}\right)}$	$\frac{1}{2}e^{\frac{\ln(u)}{2}}$	$e^{-\frac{\ln(u)}{3}}$	$2e^{\ln(u^2)}$	$e^{\ln(u)-1}$	$e^{\ln(u-1)}$						
$e^{2\ln(u)}$	$e^{\ln\left(\frac{u}{2}\right)}$	$\frac{1}{2}e^{\frac{\ln(u)}{2}}$	$e^{-\frac{\ln(u)}{3}}$	$2e^{\ln(u^2)}$	$e^{\ln(u)-1}$	$e^{\ln(u-1)}$								

A7	Ausführliche Lösungen
	$e^{2\ln(u)} = e^{\ln(u^2)} = u^2$ wegen $e^{\ln(b)} = b$
	$e^{\ln\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{u}{2}$ wegen $e^{\ln(b)} = b$
	$\frac{1}{2}e^{\frac{\ln(u)}{2}} = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\ln(u)} = \frac{1}{2}e^{\ln\left(u^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{u}$
	$e^{-\frac{\ln(u)}{3}} = e^{-\frac{1}{3}\ln(u)} = e^{-\ln(u^{\frac{1}{3}})} = \frac{1}{e^{\ln(u^{\frac{1}{3}})}} = \frac{1}{u^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{u}}$
	$2e^{\ln(u^2)} = 2u^2$
	$e^{\ln(u)-1} = e^{\ln(u)} \cdot e^{-1} = u \cdot e^{-1}$
	$e^{\ln(u-1)} = u - 1$