Lösungen Polynomgleichungen II

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$x^3+4x^2-20x-48=0\Rightarrow L=\{-6\,;-2\,;4\}$
	b)	$\frac{3}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2-3x=-9\Rightarrow L=\{-2\,;2\,;3\}$

E2	Ergebnisse	
	a)	$6x^3-8x^2-16=0\Rightarrow L=\{2\}$
	b)	$-\frac{1}{2}x^3+4x=\frac{1}{2}x^2-4\Rightarrow L=\{-\sqrt{8}\,;-1;\sqrt{8}\}$

E3	Ergebnisse	
	a)	$\frac{1}{4}\left(x^3-2x^2-x+2\right)=0\Rightarrow L=\{-1;1;2\}$
	b)	$\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}=0\Rightarrow L=\{1\}$

E4	Ergebnisse	
	a)	$-2x^3+6x^2-4x=\frac{1}{2}x-1\Rightarrow L=\left\{\frac{1}{2}\,;2\right\}$
	b)	$\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3+4x^2-2x\right)=\frac{3}{2}\Rightarrow L=\{1\}$

E5	Ergebnisse	
	a)	a) $x^3-3x^2-6x-2=0\Rightarrow L=\{-1;2-\sqrt{6}\,;2+\sqrt{6}\}$
	b)	b) $x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+2=0\Rightarrow L=\left\{-2\,;\frac{1}{2}\,;2\right\}$

E6	Ergebnisse	
	a)	c) $\left(4x^3-6x+\frac{5}{2}\right):(2x-1)=2x^2+x-\frac{5}{2}$
	b)	d) $\left(x^3-2kx^2-2x+4k\right):\left(x^2-2\right)=x-2k$

E7	Ergebnis
	$x^3-2x^2-5x+6=0\Leftrightarrow(x-1)(x-3)(x+2)=0$

E8	Ergebnis
	$x^3-3x+2=0\Leftrightarrow(x-1)(x-1)(x+2)=0$

E9	Ergebnis
	$x^3 + kx^2 - k^2x - k^3 = (x-k)(x+k)(x+k) = 0$

E10	Ergebnis
	$x^3 + (k+1)x^2 - (2k^2 - k)x - 2k^2 = 0$ $L = \{-1; -2k; k\}$

E11	Ergebnis
	$x^3 + (k-1)x^2 - (k+2)x - 2k = 0$ $L = \{-k; -1; 2\}$

E12	Ergebnis
	$x^3 - 4x^2 + (k+4)x - 2k = 0$ $L = \{2\}$ falls $k = 1$ gilt $L = \{1; 2\}$

Ausführliche Lösungen

1a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichung. $x^3 + 4x^2 - 20x - 48 = 0$

A1a	**Ausführliche Lösung**
	Für diese Polynomgleichung soll durch raten eine Lösung gefunden werden. Dazu nimmt man einen Teiler vom Absolutglied (hier einen Teiler von 48). Die Zahl 1 kommt als Lösung nicht in Frage, denn 1 + 4 - 20 -48 = -63 Der Versuch mit x = -2 ergibt -8 +16 +40 - 48 = 0 führt zum Erfolg. Mit der Polynomdivision lässt sich der Grad der Polynomgleichung verringern.

$$\left(x^3 + 4x^2 - 20x - 48\right) : \left(x + 2\right) = x^2 + 2x - 24$$
$$\underline{-\left(x^3 + 2x^2\right)}$$
$$2x^2 - 20x$$
$$\underline{-\left(2x^2 + 4x\right)}$$
$$-24x - 48$$
$$\underline{-\left(-24x - 48\right)}$$
$$0$$

$$\text{Restpolynom}: x^2 + 2x - 24 = 0$$
$$p = 2 \quad ; \quad q = -24$$
$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 24 = 25$$
$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{25} = 5$$
$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_2 = -1 + 5 = 4 \\ x_3 = -1 - 5 = -6 \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-6 \, ; -2 \, ; 4\right\}}}$$

1b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichung. $\frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - 3x = -9$

A1b	**Ausführliche Lösung**
	Zuerst wird die Polynomgleichung auf die Normalform gebracht. Durch raten erhält man die Lösung x = 2.

$$\frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - 3x = -9 \mid +9$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - 3x + 9 = 0 \mid \cdot \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$\left(x^3 - 3x^2 - 4x + 12\right) : (x-2) = x^2 - x - 6$$

$$\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)}$$

$$-x^2 - 4x$$

$$\underline{-\left(-x^2 + 2x\right)}$$

$$-6x + 12$$

$$\underline{-(-6x + 12)}$$

$$0$$

$$\text{Restpolynom}: x^2 - x - 6 = 0$$

$$p = -1 \quad ; \quad q = -6$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + \frac{24}{4} = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3 \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-2; 2; 3\}}}$$

2a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichung. $6x^3 - 8x^2 - 16 = 0$

A2a	**Ausführliche Lösung**

Um eine Lösung durch raten oder probieren zu finden, kann man entweder den Taschenrechner benutzen oder das Horner-Schema verwenden. Hat man eine Lösung für x z. B. mit dem Taschenrechner gefunden, so muss man auf jeden Fall die Polynomdivision durchführen um das Restpolynom zu finden.
Hat man hingegen mit dem Horner-Schema einen Lösungswert für x gefunden, so lässt sich aus den Koeffizienten das Restpolynom bilden.
Das Horner-Schema liefert also im Schnellverfahren als Abfallprodukt eine Polynomdivision.
Nachfolgend soll die erste Lösung mit dem Horner-Schema gefunden werden.

$$6x^3-8x^2-16=0 \,|:6$$

$$\Leftrightarrow x^3-\frac{4}{3}x^2-\frac{8}{3}=0$$

$$x=1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{8}{3} \\ \downarrow & \underline{1} & \underline{-\frac{1}{3}} & \underline{-\frac{1}{3}} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -3 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow x=1$ ist keine Lösung

$$x=2 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{8}{3} \\ \downarrow & \underline{2} & \underline{\frac{4}{3}} & \underline{\frac{8}{3}} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \end{array} \right.$$

$$1x^2 \quad + \quad \frac{2}{3}x+\frac{4}{3} \quad = \quad 0$$

$$\text{Restpolynom}: x^2+\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}=0$$

$$p=\frac{2}{3} \quad ; \quad q=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{9}+\frac{4}{3}<0$$

$\Rightarrow$ keine weitere Lösung

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{\,2\,\}}}$$

Die erste Zeile im Horner-Schema muss n + 1 Koeffizienten der Polynomgleichung enthalten, wenn der Polynomgrad n ist. Im obigen Beispiel fehlt in der Polynomgleichung der Summand mit dem Exponenten 1 also das x. Im Horner-Schema muss diese Stelle mit 0 aufgefüllt werden.
Das Restpolynom hat keine Lösung, da die Diskriminante D < 0 ist.

2b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichung.
	$-\frac{1}{2}x^3+4x=\frac{1}{2}x^2-4$

A2b	**Ausführliche Lösung**
	Zuerst wird die Polynomgleichung auf die Normalform gebracht. Durch raten erhält man die Lösung x = -1.

$$-\frac{1}{2}x^3+4x=\frac{1}{2}x^2-4 \mid -\frac{1}{2}x^2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+4x=-4 \mid +4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+4x+4=0 \mid \cdot(-2)$$

$$\Leftrightarrow x^3+x^2-8x-8=0$$

$$x=-1\left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -8 & -8 \\ \downarrow & \underline{-1} & \underline{0} & \underline{8} \\ 1 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow x_1=-1$ ist Lösung

$$\text{Restpolynom}: x^2-8=0 \mid +8$$

$$\Leftrightarrow x^2=8 \mid \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow |x|=\sqrt{8} \Rightarrow x_{2/3}=\pm\sqrt{8}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-\sqrt{8};-1;\sqrt{8}\right\}}}$$

3a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichung. $\frac{1}{4}\left(x^3-2x^2-x+2\right)=0$

A3a	**Ausführliche Lösung**
	Zuerst wird die Polynomgleichung auf die Normalform gebracht. Durch raten erhält man die Lösung x = 2.
	$\frac{1}{4}\left(x^3-2x^2-x+2\right)=0 \mid \cdot 4$ $\Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0$ $x=2\left\vert\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & 2 \\ \downarrow & \underline{2} & \underline{0} & \underline{-2} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow x_1=2$ ist Lösung $\text{Restpolynom}: x^2-1=0 \mid +1$ $\Leftrightarrow x^2=1 \mid \sqrt{\ }$ $\Leftrightarrow \lvert x\rvert=\sqrt{1} \Rightarrow x_{2/3}=\pm 1$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-1;1;2\}}}$

3b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichung.
	$\frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0$

A3b	**Ausführliche Lösung**
	Zuerst wird die Polynomgleichung auf die Normalform gebracht. Durch raten erhält man die Lösung x = 1.

$$\frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0 \mid \cdot \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$$

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ x = 1 & \downarrow & \underline{1} & \underline{1} & \underline{\frac{2}{3}} \\ & 1 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow x_1 = 1$ ist Lösung

$\text{Restpolynom}: x^2 + x + \frac{2}{3} = 0$

$p = 1 \quad ; \quad q = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} < 0$

$\Rightarrow$ keine weitere Lösung

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{1\}}}$$

4a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichung. $-2x^3+6x^2-4x=\frac{1}{2}x-1$

A4a	**Ausführliche Lösung**
	Zuerst wird die Polynomgleichung auf die Normalform gebracht. Durch einsetzen in das Horner-Schema erhält man die Lösung x = 1/2.

$$-2x^3+6x^2-4x=\frac{1}{2}x-1 \,|\, -\frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow -2x^3+6x^2-\frac{9}{2}x=-1 \,|\, +1$$

$$\Leftrightarrow -2x^3+6x^2-\frac{9}{2}x+1=0 \,|\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x^2+\frac{9}{4}x-\frac{1}{2}=0$$

$$x=\frac{1}{2}\left|\begin{array}{cccc} 1 & -3 & \frac{9}{4} & -\frac{1}{2} \\ \downarrow & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{1}{2} \text{ ist Lösung}$$

$$\text{Restpolynom}: x^2-\frac{5}{2}x+1=0$$

$$p=-\frac{5}{2} \quad ; \quad q=1$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{25}{16}-\frac{16}{16}=\frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$$

$$x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\left|\begin{array}{l} x_2=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}=2 \\ x_3=\frac{5}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow L=\left\{\frac{1}{2};2\right\}$$

Die Lösung x = 1/2 kommt zweimal vor. In diesem Fall sagt man auch x = 1/2 ist eine zweifache Lösung der Polynomgleichung.

4b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichung. $\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3+4x^2-2x\right)=\frac{3}{2}$

A4b	**Ausführliche Lösung**
	Zuerst wird die Polynomgleichung auf die Normalform gebracht. Durch einsetzen in das Horner-Schema erhält man die Lösung x = 1.

$$\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3+4x^2-2x\right)=\frac{3}{2}\mid\cdot 3$$
$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}x^3+4x^2-2x=\frac{9}{2}\mid-\frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}x^3+4x^2-2x-\frac{9}{2}=0\mid\cdot\frac{2}{5}$$
$$\Leftrightarrow x^3+\frac{8}{5}x^2-\frac{4}{5}x-\frac{9}{5}=0$$

$$x=1\left|\begin{array}{cccc} 1 & \frac{8}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{9}{5} \\ \downarrow & 1 & \frac{13}{5} & \frac{9}{5} \\ 1 & \frac{13}{5} & \frac{9}{5} & 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow x_1=1$ ist Lösung

$$\text{Restpolynom}: x^2+\frac{13}{5}x+\frac{9}{5}=0$$
$$p=\frac{13}{5}\quad;\quad q=\frac{9}{5}$$
$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{169}{100}-\frac{180}{100}<0$$

$\Rightarrow$ keine weitere Lösung

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{\,1\,\}}}$$

5a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichungen für die jeweils eine Lösung bekannt ist. Führen Sie dazu die Polynomdivision durch. $x^3 - 3x^2 - 6x - 2 = 0\,;\ x_1 = -1$

A5a Ausführliche Lösung

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3 - 3x^2 - 6x - 2\right) : (x+1) = x^2 - 4x - 2 \\
\underline{-\left(x^3 + x^2\right)} \\
\quad -4x^2 - 6x \\
\quad \underline{-\left(-4x^2 - 4x\right)} \\
\qquad\quad -2x - 2 \\
\qquad\quad \underline{-(-2x - 2)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$\text{Restpolynom}: x^2 - 4x - 2 = 0$

$p = -4 \quad ; \quad q = -2$

$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 + 2 = 6$

$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{6}$

$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_2 = 2 + \sqrt{6} \approx 4{,}449 \\ x_3 = 2 - \sqrt{6} \approx -0{,}449 \end{array} \right.$

$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-1 ; 2 - \sqrt{6} \approx -0{,}449 ; 2 + \sqrt{6} \approx 4{,}449\right\}}}$

5b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichungen für die jeweils eine Lösung bekannt ist. Führen Sie dazu die Polynomdivision durch.
	$x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+2=0\,;\,x_1=\frac{1}{2}$

A5b	**Ausführliche Lösung**

$$\left(x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+2\right):\left(x-\frac{1}{2}\right)=x^2-4$$
$$\underline{-\left(x^3-\frac{1}{2}x^2\right)}$$
$$-4x+2$$
$$\underline{-(-4x+2)}$$
$$0$$

Restpolynom: $x^2-4=0\,|+4$

$$\Leftrightarrow x^2=4\,|\sqrt{\ }$$
$$\Leftrightarrow |x|=2\Leftrightarrow x_{2/3}=\pm 2$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-2\,;\frac{1}{2}\,;2\right\}}}$$

6a	**Aufgabe**
	Führen Sie die Polynomdivision durch.
	$\left(4x^3-6x+\frac{5}{2}\right):(2x-1)$

A6a	**Ausführliche Lösung**

$$\left(4x^3+0x^2-6x+\frac{5}{2}\right):(2x-1)=\underline{\underline{2x^2+x-\frac{5}{2}}}$$
$$\underline{-\left(4x^3-2x^2\right)}$$
$$2x^2-6x$$
$$\underline{-\left(2x^2-x\right)}$$
$$-5x+\frac{5}{2}$$
$$\underline{-\left(-5x+\frac{5}{2}\right)}$$
$$0$$

Falls im zu teilenden Polynom ein Summand fehlt, sollte man diesen durch die entsprechende Potenz mit dem Koeffizienten 0 ersetzen (hier $0x^2$). Das vereinfacht die Rechnung.

6b Aufgabe

Führen Sie die Polynomdivision durch.

$\left(x^3-2kx^2-2x+4k\right):\left(x^2-2\right)$

A6b Ausführliche Lösung

$$\begin{array}{l}\left(x^3-2kx^2-2x+4k\right):\left(x^2-2\right)=\underline{\underline{x-2k}}\\ \underline{-\left(x^3\qquad\quad -2x\right)}\\ \qquad -2kx^2\qquad +4k\\ \quad\underline{-\left(-2kx^2\qquad +4k\right)}\\ \qquad\qquad\quad 0\end{array}$$

Diese Aufgabe zeigt, wie wichtig es ist die auftretenden Summanden sauber untereinander zu schreiben.

7 Aufgabe

Zerlegen Sie in Linearfaktoren.

$x^3-2x^2-5x+6=0$

A7 Ausführliche Lösung

Eine Polynomgleichung 3. Grades mit den Lösungen x_1 ; x_2 und x_3 lässt sich auch als Produkt ihrer Linearfaktoren schreiben. $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$
Das gilt in entsprechender Weise für alle Polynomgleichungen beliebigen Grades, falls deren Lösungen bekannt sind.
Durch einsetzen in das Horner-Schema erhält man die Lösung x = 1.

$$x^3-2x^2-5x+6=0$$

$$x=1\left|\begin{array}{cccc}1 & -2 & -5 & 6\\ \downarrow & \underline{1} & \underline{-1} & \underline{-6}\\ 1 & -1 & -6 & 0\end{array}\right.$$

$\Rightarrow x_1=1$ ist Lösung

Restpolynom : $x^2-x-6=0$

$p=-1\quad ;\quad q=-6$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+\frac{24}{4}=\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

$$x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}x_2=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3\\ x_3=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-2\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow L=\left\{-2;1;3\right\}$$

$$\underline{\underline{(x+2)(x-1)(x+2)}}=x^3-2x^2-5x+6=0$$

8.	Zeigen Sie: x = 1 ist doppelte Lösung von $x^3 - 3x + 2$

A8	**Ausführliche Lösung**
	Falls x = 1 doppelte Lösung von $x^3 - 3x + 2$ ist, muss gelten: $(x-1)(x-1)(\ldots) = (x-1)^2(\ldots) = (x^2 - 2x + 1)(\ldots) = x^3 - 3x + 2$ Das bedeutet die Polynomdivision $(x^3 - 3x + 2):(x^2 - 2x + 1)$ muss ohne Rest aufgehen. Das Ergebnis liefert sogar eine weitere Lösung.
	$\left(x^3+0x^2-3x+2\right):\left(x^2-2x+1\right)=\underline{\underline{x+2}}$ $-\left(x^3-2x^2+x\right)$ $2x^2-4x+2$ $-\left(2x^2-4x+2\right)$ 0 Da die Polynomdivision ohne Rest aufgeht gilt: $(x^2 - 2x + 1) = (x-1)(x-1)(x+2) = 0$ Damit wurde gezeigt, das x = 1 eine doppelte Lösung ist.

9.	Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^3 + kx^2 - k^2x - k^3 = 0$ nur die Lösungen $x_1 = k$ und $x_2 = -k$ besitzt.

A9	**Ausführliche Lösung**
	Es ist eine Polynomdivision mit dem Produkt $(x-k)(x+k) = x^2 - k^2$ durchzuführen. Das Ergebnis muss entweder (x - k) oder (x + k) lauten.
	$\left(x^3+kx^2-k^2x-k^3\right):\left(x^2-k^2\right)=\underline{\underline{x+k}}$ $-\left(x^3 \qquad -k^2x\right)$ $kx^2 \qquad -k^3$ $-\left(kx^2 \qquad -k^3\right)$ 0 Damit gilt: $x^3 + kx^2 - k^2x - k^3 = (x-k)(x+k)(x+k) = 0$

10.	Gegeben ist die Gleichung $x^3 + (k + 1)x^2 - (2k^2 - k)x - 2k^2 = 0$ Zeigen Sie, das $x_1 = k$ eine Lösung der Gleichung ist und berechnen Sie alle weiteren Lösungen.

A10 Ausführliche Lösung

$$x^3+(k+1)x^2-(2k^2-k)x-2k^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^3+kx^2+x^2-2k^2x+kx-2k^2=0$$

$$\begin{array}{l}
(x^3+kx^2+x^2-2k^2x+kx-2k^2):(x-k)=\underline{\underline{x^2+2kx+x+2k}}\\
\underline{-(x^3-kx^2)}\\
\quad 2kx^2+x^2-2k^2x\\
\quad \underline{-(2kx^2 \qquad -2k^2x)}\\
\qquad x^2 \qquad +kx\\
\qquad \underline{-(x^2 \qquad -kx)}\\
\qquad\qquad 2kx-2k^2\\
\qquad\qquad \underline{-(2kx-2k^2)}\\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$x^2+2kx+x+2k=x^2+(2k+1)x+2k=0$$

$$p=(2k+1)\Rightarrow\frac{p}{2}=k+\frac{1}{2}\;;q=2k$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=k^2+k+\frac{1}{4}-2k$$

$$=k^2-k+\frac{1}{4}=\left(k-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}=k-\frac{1}{2}$$

$$x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\;\begin{array}{l} x_2=-k-\frac{1}{2}+k-\frac{1}{2}=-1\\ x_3=-k-\frac{1}{2}-k+\frac{1}{2}=-2k\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow L=\{-1;-2k;k\}$$

11.	Gegeben ist die Gleichung $x^3 + (k - 1)x^2 - (k + 2)x - 2k = 0$ Zeigen Sie, das $x_1 = -1$ eine Lösung der Gleichung ist und berechnen Sie alle weiteren Lösungen.

A11 Ausführliche Lösung

$$x^3 + (k-1)x^2 - (k+2)x - 2k = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + kx^2 - x^2 - kx - 2x - 2k = 0$$

$$\begin{array}{l}
\left(x^3 + kx^2 - x^2 - kx - 2x - 2k\right) : (x+1) = \underline{\underline{x^2 + kx - 2x - 2k}} \\
\underline{-\left(x^3 \qquad + x^2\right)} \\
\qquad kx^2 - 2x^2 - kx \\
\qquad \underline{-\left(kx^2 \qquad + kx\right)} \\
\qquad\qquad -2x^2 - 2kx - 2x \\
\qquad\qquad \underline{-\left(-2x^2 \qquad - 2x\right)} \\
\qquad\qquad\qquad -2kx - 2k \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-\left(-2kx - 2k\right)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$x^2 + kx - 2x - 2k = x^2 + (k-2)x - 2k = 0$$

$$p = (k-2) \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{k}{2} - 1 \quad ; q = -2k$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{k^2}{4} - k + 1 + 2k$$

$$= \frac{k^2}{4} + k + 1 = \left(\frac{k}{2} + 1\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\left(\frac{k}{2} + 1\right)^2} = \frac{k}{2} + 1$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{k}{2} + 1 + \frac{k}{2} + 1 = 2 \\ x_3 = -\frac{k}{2} + 1 - \frac{k}{2} - 1 = -k \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-k\,; -1; 2\}}}$$

12.	Gegeben ist die Gleichung $x^3 - 4x^2 + (k + 4)x - 2k = 0$ Zeigen Sie, das $x_1 = 2$ eine Lösung der Gleichung ist. Für welche Werte von k gibt es genau eine weitere doppelte Lösung? Stellen Sie das Ergebnis als Produkt von Linearfaktoren dar.

A12 **Ausführliche Lösung**

$$x^3 - 4x^2 + (k+4)x - 2k = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + kx + 4x - 2k = 0$$

$$(x^3 - 4x^2 + kx + 4x - 2k) : (x-2) = \underline{\underline{x^2 - 2x + k}}$$

$$\underline{-(x^3 - 2x^2)}$$

$$-2x^2 + kx + 4x$$

$$\underline{-(-2x^2 \quad + 4x)}$$

$$kx \quad -2k$$

$$\underline{-(kx \quad -2k)}$$

$$0$$

$$p = -2 \quad ; q = k$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 - k$$

genau eine Lösung für

$$\Rightarrow \sqrt{D} = 0 \Leftrightarrow 1 - k = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{k = 1}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{1; 2\}}} \text{ falls } k = 1$$

$$\underline{\underline{(x-1)(x-1)(x-2)}} = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$