Lösungen Polynomgleichungen V

Ergebnisse:

E1	Ergebnis	
	$x_1 = 14\,;\, x_2 = 24\,;\, \left(x_3 = -7 < 0\right)$ Für einen Gewinn von 1500 € müssen 14 bzw. 24 Stück verkauft werden.	

E2	Ergebnisse	
	a)	Im Jahr 2006 betrug die installierte Leistung 21 Gigawatt.
	b)	Im Jahr 2013 betrug die installierte Leistung etwa 33 Gigawatt.
	c)	Im Jahr 2016 kann man mit einer Leistung von 46 GW rechnen.

E3	Ergebnis	
	a)	$x^4 - 6 = \frac{5}{8}x^4 \Rightarrow L = \{-2\,;\,2\}$
	b)	$\frac{4}{9}x^4 - \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow L = \left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$
	c)	$x^4 - \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow L = \left\{-\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$

E4	Ergebnis	
	a)	$\frac{4}{k} = \frac{4}{k^3}x^4; k > 0 \Rightarrow L = \left\{-\sqrt{k}\,;\sqrt{k}\right\}$
	b)	$\frac{1}{8k^2}x^4 - 2k^2 = 0; k \neq 0 \Rightarrow L = \{-2k;2k\}$
	c)	$\left(\frac{4}{125}x^4 - \frac{5}{2}\right)k = 0\,; k \neq 0 \Rightarrow L = \left\{-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right\}$

E5	Ergebnis
	$kx^4 - 3 = 0 \Rightarrow L = \left\{-\sqrt[4]{\frac{3}{k}};\sqrt[4]{\frac{3}{k}}\right\}$ falls k > 0.

E6	Ergebnis
	$(k+2)x^4 - 8 = 3x^4 \Rightarrow L = \left\{-\frac{2}{\sqrt[4]{k-1}};\frac{2}{\sqrt[4]{k-1}}\right\}$ falls k > 1.

E7	Ergebnisse	
	a)	$p = 100\left(\sqrt[8]{2} - 1\right) \approx 9{,}05$ (9,05%).
	b)	$K_{15} = K_0 \cdot 2^{\frac{15}{8}} \approx 36680{,}16$ €
	c)	$p = 100\left(\sqrt[8]{1{,}5} - 1\right) \approx 5{,}2$ (5,2%).

E8	Ergebnis	
	Die durchschnittliche jährliche Inflationsrate beträgt etwa 2,52%.	

E9	Ergebnisse	
	a)	$4x^4 - \frac{3}{4}x^3 = 0 \Rightarrow L = \left\{0\,;\,\frac{3}{16}\right\}$
	b)	$\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^2 = 0 \Rightarrow L = \left\{-\sqrt{\frac{10}{3}}\,;\,0\,;\,\sqrt{\frac{10}{3}}\right\}$
	c)	$x^4 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{7}{3}x^2 = 0 \Rightarrow L = \left\{-1\,;\,0\,;\,\frac{7}{3}\right\}$

E10	Ergebnisse	
	a)	$\frac{2}{3}x^4 - 2x = 3x \Rightarrow L = \left\{0\,;\,\sqrt[3]{\frac{15}{2}}\right\}$
	b)	$\frac{3}{5}x^4 - \frac{3}{2}x^3 = 0 \Rightarrow L = \left\{0\,;\,\frac{5}{2}\right\}$
	c)	$\frac{7}{9}x^4 - \frac{4}{3}x^2 = 0 \Rightarrow L = \left\{-\sqrt{\frac{12}{7}}\,;\,0\,;\,\sqrt{\frac{12}{7}}\right\}$

Ausführliche Lösungen

1 Aufgabe

$K(x) = x^3 - 31x^2 + 2070x + 852$

stellt die Gesamtkosten für die Herstellung der Menge x eines Produktes dar.
Welche Menge muss produziert und zu einem Stückpreis von 2000 € verkauft werden, damit ein Gewinn von 1500 € erzielt wird.

A1 Ausführliche Lösung

K(x) heißt Kostenfunktion und gibt an, welche Kosten bei der Produktion der Menge x eines Produktes entstehen.
E(x) heißt Erlösfunktion und gibt an, wie groß der Erlös ist, wenn die Menge x verkauft wird.
G(x) = E(x) - K(x) heißt Gewinnfunktion und gibt an, wie hoch der Gewinn ist, wenn die Menge x verkauft wird.
Lösungsansatz: G(x) = 1500

$$K(x) = x^3 - 31x^2 + 2070x + 852$$

$$E(x) = 2000x$$

$$\begin{aligned} G(x) &= E(x) - K(x) \\ &= 2000x - \left(x^3 - 31x^2 + 2070x + 852\right) \\ &= -x^3 + 31x^2 - 70x - 852 \end{aligned}$$

$$G(x) = 1500 \Leftrightarrow G(x) - 1500 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^3 + 31x^2 - 70x - 2352 = 0$$

Die Polynomgleichung lässt sich lösen, wenn eine Lösung bekannt ist.
Um die erste Lösung zu finden, wird versucht ob ein Teiler vom Absolutglied, also von 2352 die Polynomgleichung erfüllt. Dazu werden zunächst die Teiler bestimmt und in das Horner-Schema eingesetzt.

$$2352 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7^2$$

$$x = 7 \left| \begin{array}{cccc} -1 & 31 & -70 & -2352 \\ \downarrow & \underline{-7} & \underline{+168} & \underline{+\ 686} \\ -1 & 24 & 98 & -1667 \end{array} \right.$$

$$x = -7 \left| \begin{array}{cccc} -1 & 31 & -70 & -2352 \\ \downarrow & \underline{+7} & \underline{-266} & \underline{+2352} \\ -1 & 38 & -336 & 0 \end{array} \right.$$

$$-x^2 \quad +38x \quad -336 \quad = \quad 0$$

Wie das Horner-Schema zeigt, ist x = -7 eine Lösung der Polynomgleichung.
Das Restpolynom ist eine quadratische Gleichung, die mit der p-q-Formel gelöst werden kann und damit weitere Lösungen liefert.

A1 Ausführliche Lösung

$$-x^2+38x-336=0\,|\cdot(-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2-38x+336=0$$

$$\Rightarrow p=-38\,;\,q=336$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=361-336=25$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{25}=5$$

$$\Rightarrow x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}x_2=19+5=24\\x_3=19-5=14\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-7\,;14\,;24\}}}$$

Für einen Gewinn von 1500 € müssen x = 14 bzw. x = 24 Stück verkauft werden. Die Lösung x = -7 hat für die Lösung keine Relevanz, da negativ. Negative Stückzahlen machen keinen Sinn.

2. Aufgabe

Die Entwicklung der installierten Leistung von Windkraftanlagen in Deutschland seit 2006 lässt sich näherungsweise mit der Funktion

$P(x)=\frac{1}{48}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{3}x+21$ beschreiben.

Die Variable x steht für Jahre, P(x) für Gigawatt (GW).

Installierte Leistung an Windenergie in Deutschland lt. BWE (Bundesverband Windenergie)

Jahr	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
GW	6	9	12	15	17	18	21	22	24	26	27	29	31

http://www.wind-energie.de/infocenter/statistiken/deutschland/installierte-windenergieleistung-deutschland

a) Welche Leistung war 2006 installiert?

b) Welche Leistung war 2013 installiert?

c) In welchem Jahr kann unter gleichen Voraussetzungen mit einer installierten Leistung von 46 GW gerechnet werden?

A2a Ausführliche Lösung

Da das Jahr 2006 fur die Funktion als Startjahr gilt, bedeutet das für den x-Wert x = 0. Setzt man diesen Wert in die Funktionsgleichung ein, dann gilt:
P(0) = 21.
Das bedutet, im Jahr 2006 betrug die installierte Leistung etwa 21 Gigawatt.

A2b Ausführliche Lösung

Für 2013 muss die Differenz der Jahre zwischen 2006 und 20013 eingesetzt werden. Die Differenz beträgt x = 7.

$$P(x)=\frac{1}{48}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{3}x+21$$

$$\Rightarrow P(7)=\frac{1}{48}\cdot 7^3-\frac{1}{8}\cdot 7^2+\frac{5}{3}\cdot 7+21$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P(7)\approx 33{,}688}}$$

Im Jahr 2013 betrug die installierte Leistung etwa 33,688 GW.
Der Wert lässt sich leicht mit dem Taschenrechner bestimmen.

A2c **Ausführliche Lösung**

Ansatz:

$$P(x) = 46$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{48}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{3}x + 21 = 46 \mid -46$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{48}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{3}x - 25 = 0 \mid \cdot 48$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 80x - 1200 = 0$$

Um eine Lösung durch raten oder probieren zu finden, kann man entweder den Taschenrechner benutzen oder das Horner-Schema verwenden. Hat man eine Lösung für x z. B. mit dem Taschenrechner gefunden, so muss man auf jeden Fall die Polynomdivision durchführen um das Restpolynom zu finden.
Hat man hingegen mit dem Horner-Schema einen Lösungswert für x gefunden, so lässt sich aus den Koeffizienten das Restpolynom bilden.
Das Horner-Schema liefert also im Schnellverfahren als Abfallprodukt eine Polynomdivision.
Durch raten erhält man die Lösung x = 10.

$$x = 10 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -6 & 80 & -1200 \\ \downarrow & \underline{+10} & \underline{+40} & \underline{+1200} \\ 1 & 4 & 120 & 0 \end{array} \right.$$

Da x = 10 eine Lösung der im Ansatz aufgestellten Polynomgleichung ist, beträgt die installierte Leistung im Jahre 2006 + 10 = 2016 etwa 46 GW.

Bemerkung:
Diese Rechnung ist lediglich eine Trendrechnung unter der Voraussetzung, das die Bedingungen sich für weitere Installationen nicht ändern. Politik und Wirtschaft können sowohl positiv, wie auch negativ diesen Trend beeinflussen.

3a **Aufgabe**

Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung.

$$x^4 - 6 = \frac{5}{8}x^4$$

A3a **Ausführliche Lösung**

$$x^4 - 6 = \frac{5}{8}x^4 \mid -\frac{5}{8}x^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8}x^4 - 6 = 0 \mid +6$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8}x^4 = 6 \mid \cdot \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^4 = 16 \mid \sqrt[4]{}$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2 \Rightarrow \underline{\underline{L = \{-2\,;\,2\}}}$$

3b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $\frac{4}{9}x^4 - \frac{9}{4} = 0$

A3b	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{4}{9}x^4 - \frac{9}{4} = 0 \mid + \frac{9}{4}$ $\Leftrightarrow \frac{4}{9}x^4 = \frac{9}{4} \mid \cdot \frac{9}{4}$ $\Leftrightarrow x^4 = \frac{81}{16} \mid \sqrt[4]{}$ $\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\frac{3}{2}$ $\Rightarrow L = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$

3c	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $x^4 - \frac{9}{4} = 0$

A3c	**Ausführliche Lösung**
	$x^4 - \frac{9}{4} = 0 \mid + \frac{9}{4}$ $\Leftrightarrow x^4 = \frac{9}{4} \mid \sqrt[4]{}$ $\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ $\Rightarrow L = \left\{-\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$

4a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $\frac{4}{k}=\frac{4}{k^3}x^4; k>0$

A4a	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{4}{k}=\frac{4}{k^3}x^4; k>0$ $\Leftrightarrow \frac{4}{k^3}x^4=\frac{4}{k} \mid \cdot\frac{k^3}{4}$ $\Leftrightarrow x^4=k^2 \mid \sqrt{\ }$ $\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{k} \Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-\sqrt{k}\,;\,\sqrt{k}\right\}}}$

4b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $\frac{1}{8k^2}x^4-2k^2=0; k\neq 0$

A4b	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{1}{8k^2}x^4-2k^2=0 \mid +2k^2$ $\Leftrightarrow \frac{1}{8k^2}x^4=2k^2 \mid \cdot 8k^2$ $\Leftrightarrow x^4=16k^4 \mid \sqrt[4]{\ }$ $\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 2k \Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-2k\,;\,2k\right\}}}$

4c	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $\left(\frac{4}{125}x^4-\frac{5}{2}\right)k=0; k\neq 0$

A4c	**Ausführliche Lösung**
	$\left(\frac{4}{125}x^4-\frac{5}{2}\right)k=0$ $\Leftrightarrow \frac{4}{125}x^4-\frac{5}{2}=0 \mid +\frac{5}{2}$ $\Leftrightarrow \frac{4}{125}x^4=\frac{5}{2} \mid \cdot\frac{125}{4}$ $\Leftrightarrow x^4=\frac{625}{8} \mid \sqrt[4]{\ }$ $\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\frac{5}{2} \Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-\frac{5}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right\}}}$

5	**Aufgabe**
	Für welche Werte von k gibt es eine Lösung? $kx^4 - 3 = 0$

A5	**Ausführliche Lösung**
	$kx^4 - 3 = 0 \mid +3$ $\Leftrightarrow kx^4 = 3 \mid :k$ $\Leftrightarrow x^4 = \frac{3}{k} \mid \sqrt[4]{}$ $\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt[4]{\frac{3}{k}}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{ -\sqrt[4]{\frac{3}{k}} ; \sqrt[4]{\frac{3}{k}} \right\}}}$ falls $k > 0$ Wenn es eine Lösung geben soll, muss k > 0 sein, da die 4. Wurzel nur für positive Zahlen definiert ist.

6	**Aufgabe**
	Für welche Werte von k lässt sich die Gleichung lösen? $(k+2)x^4 - 16 = 3x^4$

A6	**Ausführliche Lösung**
	$(k+2)x^4 - 16 = 3x^4 \mid +16$ $\Leftrightarrow (k+2)x^4 = 3x^4 + 16 \mid -3x^4$ $\Leftrightarrow kx^4 + 2x^4 - 3x^4 = 16$ $\Leftrightarrow kx^4 - x^4 = 16$ $\Leftrightarrow (k-1)x^4 = 16 \mid :(k-1)$ $\Leftrightarrow x^4 = \frac{16}{k-1} \mid \sqrt[4]{}$ $\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\frac{2}{\sqrt[4]{k-1}}$ für $k > 1$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{ -\frac{2}{\sqrt[4]{k-1}} ; \frac{2}{\sqrt[4]{k-1}} \right\}}}$ falls $k > 1$ Da der Nenner des Bruches ungleich 0 und der Wert, der unter der 4. Wurzel steht positiv sein muss, gilt k > 1.

7.	**Aufgabe**	
	Dagobert erbt 10000 €. Er möchte das Kapital in 8 Jahren verdoppeln.	
	a)	Wie hoch müsste die jährliche Verzinsung sein?
	b)	Welches Guthaben hätte er nach 15 Jahren?
	c)	Wegen einer Finanzkriese vermehrt sich das Kapital in 8 Jahren nur auf 15000 €. Wie hoch war der mittlere Jahreszins?

A7 Ausführliche Lösung

Die Zinseszinsformel: $K_n = K_0 \cdot q^n$ mit $q = 1 + \frac{p}{100}$

K_0 : Anfangskapital
K_n : Guthaben nach n Jahren
p : Zinssatz in %
q = 1 + p/100 (Zinsfaktor)

A7a Ausführliche Lösung

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad | : K_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{K_n}{K_0} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad | \sqrt[n]{}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \quad | -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \quad | \cdot 100$$

$$\Leftrightarrow p = 100\left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1\right)$$

Ansatz:

$$K_8 = 2K_0 \Leftrightarrow \frac{K_8}{K_0} = 2 \,; n = 8$$

$$\Rightarrow p = 100\left(\sqrt[8]{2} - 1\right) \approx 9{,}05$$

Die jährliche Verzinsung müsste etwa 9,09% betragen.

A7b	**Ausführliche Lösung**
	$K_{15} = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^{15}$ mit $p = 100\left(\sqrt[8]{2}-1\right)$ gilt: $K_{15} = K_0\left(1+\frac{\cancel{100}\left(\sqrt[8]{2}-1\right)}{\cancel{100}}\right)^{15}$ $\Leftrightarrow K_{15} = K_0\left(1+\left(\sqrt[8]{2}-1\right)\right)^{15}$ $\Leftrightarrow K_{15} = K_0\left(\sqrt[8]{2}\right)^{15} = K_0\left(2^{\frac{1}{8}}\right)^{15}$ $\Leftrightarrow K_{15} = K_0 \cdot 2^{\frac{15}{8}} \approx \underline{\underline{36680,16}}$ Nach 15 Jahren wäre das Kapital auf 36680,16 € angewachsen. Eine Rechnung mit dem Näherungswert von p = 9,05% ergäbe 36878,57 €. Um den zu berechnenden Wert möglicht genau zu bekommen, setzt man für p den algebraischen Ausdruck ein und vereinfacht die Gleichung bevor man mit dem Taschenrechner das Ergebnis berechnet.

A7c	**Ausführliche Lösung**
	Ansatz: $K_8 = 1{,}5K_0 \Leftrightarrow \frac{K_8}{K_0} = 1{,}5\,;n = 8$ $\Rightarrow p = 100\left(\sqrt[8]{1{,}5}-1\right) \approx \underline{\underline{5{,}2}}$ Der mittlere Jahreszins betrug etwa 5,2%.

8	**Aufgabe**
	Wie hoch ist die durchschnittliche jährliche Inflationsrate, wenn das Geld innerhalb von 5 Jahren 12% an Kaufkraft verliert?

A8 Ausführliche Lösung

Bei einer exponentiellen Abnahme gilt:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n \quad |:K_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{K_n}{K_0} = \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n \quad |\sqrt[n]{}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} = 1 - \frac{p}{100} \quad | + \frac{p}{100}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} + \frac{p}{100} = 1 \quad | - \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{100} = 1 - \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \quad | \cdot 100$$

$$\Leftrightarrow p = 100\left(1 - \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}\right)$$

Ansatz:

$$\frac{K_n}{K_0} = \frac{K_5}{K_0} = 0{,}88$$

$$\Rightarrow p = 100\left(1 - \sqrt[5]{0{,}88}\right)$$

$$\Leftrightarrow p = 100\left(1 - 0{,}88^{\frac{1}{5}}\right) \approx \underline{\underline{2{,}25\%}}$$

Die durchschnittliche jährliche Inflationsrate beträgt etwa 2,52%.

9a	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichungen nach x auf. $4x^4 - \frac{3}{4}x^3 = 0$

A9a	**Ausführliche Lösung**
	Aus der Polynomgleichung kann x^3 ausgeklammert werden. Es entsteht ein Produkt. Da dieses aber Null ist, kann der Satz vom Nullprodukt angewendet werden, der da lautet: "Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist." Die Lösung der Gleichung findet man also dadurch, dass man jeden Faktor für sich gleich Null setzt.
	$4x^4 - \frac{3}{4}x^3 = 0$ $\Leftrightarrow x^3\left(4x - \frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $4x - \frac{3}{4} = 0 \mid + \frac{3}{4}$ $\Leftrightarrow 4x = \frac{3}{4} \mid \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{16}$ $\Rightarrow L = \left\{0 ; \frac{3}{16}\right\}$

9b	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichungen nach x auf. $\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^2 = 0$

A9b	**Ausführliche Lösung**
	Aus der Polynomgleichung kann x^2 ausgeklammert werden.
	$\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^2 = 0$ $\Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3} = 0 \mid + \frac{5}{3}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = \frac{5}{3} \mid \cdot 2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{10}{3}$ $\Leftrightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{10}{3}}$ $\Rightarrow L = \left\{-\sqrt{\frac{10}{3}} ; 0 ; \sqrt{\frac{10}{3}}\right\}$

9c	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichungen nach x auf. $x^4 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{7}{3}x^2 = 0$

A9c	**Ausführliche Lösung**
	Aus der Polynomgleichung kann x^2 ausgeklammert werden.

$$x^4 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{7}{3}x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} = 0$$

$$\Rightarrow p = -\frac{4}{3}; q = -\frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{4}{9} + \frac{21}{9} = \frac{25}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3} \\ x_3 = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} = -1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-1; 0; \frac{7}{3}\right\}}}$$

10a	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichungen nach x auf. $\frac{2}{3}x^4 - 2x = 3x$

A10a	**Ausführliche Lösung**
	Aus der Polynomgleichung kann x ausgeklammert werden.
	$\frac{2}{3}x^4 - 2x = 3x \mid -3x$ $\Leftrightarrow \frac{2}{3}x^4 - 5x = 0$ $\Leftrightarrow x\left(\frac{2}{3}x^3 - 5\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $\frac{2}{3}x^3 - 5 = 0 \mid +5$ $\Leftrightarrow \frac{2}{3}x^3 = 5 \mid \cdot \frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow x^3 = \frac{15}{2} \mid \sqrt[3]{\ }$ $\Leftrightarrow x_2 = \sqrt[3]{\frac{15}{2}}$ $\Rightarrow L = \left\{0 ; \sqrt[3]{\frac{15}{2}}\right\}$

10b	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichungen nach x auf. $\frac{3}{5}x^4 - \frac{3}{2}x^3 = 0$

A10b	**Ausführliche Lösung**
	Aus der Polynomgleichung kann x^3 ausgeklammert werden.
	$\frac{3}{5}x^4 - \frac{3}{2}x^3 = 0$ $\Leftrightarrow x^3\left(\frac{3}{5}x - \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $\frac{3}{5}x - \frac{3}{2} = 0 \mid + \frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow \frac{3}{5}x = \frac{3}{2} \mid \cdot \frac{5}{3}$ $\Leftrightarrow x_2 = \frac{5}{2}$ $\Rightarrow L = \left\{0 ; \frac{5}{2}\right\}$

10c	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichungen nach x auf. $\frac{7}{9}x^4 - \frac{4}{3}x^2 = 0$

A10c	**Ausführliche Lösung**
	Aus der Polynomgleichung kann x^2 ausgeklammert werden.
	$\frac{7}{9}x^4 - \frac{4}{3}x^2 = 0$ $\Leftrightarrow x^2\left(\frac{7}{9}x^2 - \frac{4}{3}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $\frac{7}{9}x^2 - \frac{4}{3} = 0 \mid +\frac{4}{3}$ $\Leftrightarrow \frac{7}{9}x^2 = \frac{4}{3} \mid \cdot\frac{9}{7}$ $\Leftrightarrow x^2 = \frac{12}{7}$ $\Leftrightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{12}{7}}$ $\Rightarrow L = \left\{-\sqrt{\frac{12}{7}}; 0; \sqrt{\frac{12}{7}}\right\}$