

Lösungen Potenzen und Wurzeln I

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse			
	a)	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	b)	$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$
	c)	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	d)	$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
	e)	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	f)	$\frac{ax^9 + bx^7}{x^5} = ax^4 + bx^2$
g)	$\frac{(4a^2 + 4a + 1)^x}{(2a+1)^x} = (2a+1)^x$	h)	$\frac{49z^2 - 1}{7z - 1} = 7z + 1$	

E2	Ergebnisse	
	a)	$\frac{ma^5 - ma^3b^2}{ma^2} = a^3 - ab^2$
	b)	$\frac{25x^2 - 100y^2}{5x + 10y} = 5x - 10y$
c)	$\frac{(a^2 + 2ab + b^2)^3}{(a+b)^3} = (a+b)^3$	

E3	Ergebnisse		
	a)	$\frac{(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)^m}{(a-b)^m} = (a-b)^{2m}$	b)

E4	Ergebnisse			
	a)	$\sqrt{x^2y^2} = xy$	b)	$\sqrt{a^2b^2c^2} = abc$
	c)	$\sqrt{4x^2y^2} = 2xy$	d)	$\sqrt[3]{u^3v^3w^3} = uvw$
	e)	$\sqrt[5]{x^{10}y^5z^{15}} = x^2yz^3$	f)	$\sqrt[4]{a^2b^4c^6} = \sqrt{a} \cdot bc \cdot \sqrt{c}$
g)	$(x^4y^4)^{\frac{3}{2}} = (xy)^6$		h)	$(27a^3b^6)^{\frac{1}{3}} = 3ab^2$

E5	Ergebnisse			
	a)	$\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} + 4\sqrt{3} = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$	b)	$\sqrt[3]{y} - \sqrt[4]{b} + 2\sqrt[3]{y} - 3\sqrt[4]{b} = 3\sqrt[3]{y} - 4\sqrt[4]{b}$
	c)	$\left[(a+b)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}} \cdot \left[(a+b)^{-\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} = (a+b)^{\frac{1}{2}}$	d)	$\frac{3\sqrt{a^3} \cdot 2\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[4]{a} \cdot a^{\frac{3}{4}}} = 6a^3$
e)	$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt[12]{x^{-18}} = 1$		f)	$(n+x)^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{(n+x)^5} = (n+x)^2$

E6	Ergebnisse		
a)	$\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot 2x^{\frac{2}{3}} \cdot 5\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^4}}{x^4 \cdot \sqrt[4]{x^3}} = 10x^3$	b)	$\frac{a^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{a^7}}{a^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{a^3} \cdot \sqrt[4]{a^3}} = a^2$

E7	Ergebnisse	
a)	$\frac{1}{x^3} - 2x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{2}{3}} = 6x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{1}{2}}$	
b)	$(a+b)^{\frac{1}{2}} + (a+b)^{\frac{2}{3}} - (a-b)^{\frac{1}{2}} + (a+b)^{\frac{2}{3}} - (a+b)^{\frac{1}{2}} + (a-b)^{\frac{1}{2}} = 2(a+b)^{\frac{2}{3}}$	
c)	$\sqrt{a+b} + \sqrt[3]{a+b} - \sqrt{a-b} + \sqrt[3]{a-b} - 3\sqrt[3]{a+b} + 2\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$ $= 3\sqrt{a+b} - 2 \cdot \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}$	

Potenz- und Wurzelgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$(\sqrt{a})^2 = a$	$\sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

Da jede Wurzel als Potenz dargestellt werden kann, ist es in vielen Fällen vorteilhaft, Wurzeln in Potenzen zu verwandeln um dann die Rechnung durch anwenden der Potenzgesetze durchzuführen. Bei Bedarf kann ein Ergebnis mit gebrochenem Exponenten wieder in eine Wurzel verwandelt werden.

Ausführliche Lösungen :

A1	Aufgabe							
	Berechnen Sie die folgenden Terme							
	a)	$(a+b)^2$	b)	$(a+x)^2$	c)	$(a-b)^2$	d)	$(x-y)^2$
e)	$(a+b)^3$	f)	$\frac{ax^9 + bx^7}{x^5}$	g)	$\frac{(4a^2 + 4a + 1)^x}{(2a+1)^x}$	h)	$\frac{49z^2 - 1}{7z - 1}$	

A1	Ausführliche Lösung							
a)	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$			1. binomische Formel				

A1	Ausführliche Lösung							
b)	$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$			1. binomische Formel				

A1	Ausführliche Lösung							
c)	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$			2. binomische Formel				

A1	Ausführliche Lösung							
d)	$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$			2. binomische Formel				

A1	Ausführliche Lösung							
e)	$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2)$ $= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = \underline{\underline{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}}$							

A1	Ausführliche Lösung							
f)	$\frac{ax^9 + bx^7}{x^5} = \frac{x^5(ax^4 + bx^2)}{x^5} = \underline{\underline{ax^4 + bx^2}}$							

A1	Ausführliche Lösung							
g)	$\frac{(4a^2 + 4a + 1)^x}{(2a+1)^x} = \left[\frac{(4a^2 + 4a + 1)}{2a+1} \right]^x$ $= \left[\frac{(2a+1)^2}{2a+1} \right]^x = \underline{\underline{(2a+1)^x}}$							

A1	Ausführliche Lösung							
h)	$\frac{49z^2 - 1}{7z - 1} = \frac{(7z+1)(7z-1)}{7z-1} = \underline{\underline{7z+1}}$							

A2	Aufgabe		
	Berechnen Sie die folgenden Terme		
	a)	$\frac{ma^5 - ma^3b^2}{ma^2}$	b) $\frac{25x^2 - 100y^2}{5x + 10y}$
			c) $\frac{(a^2 + 2ab + b^2)^3}{(a+b)^3}$

A2	Ausführliche Lösung	
	a)	$\frac{ma^5 - ma^3b^2}{ma^2} = \frac{ma^2(a^3 - ab^2)}{ma^2} = \underline{\underline{a^3 - ab^2}}$

A2	Ausführliche Lösung	
	b)	$\frac{25x^2 - 100y^2}{5x + 10y} = \frac{(5x - 10y)(5x + 10y)}{5x + 10y} = \underline{\underline{5x - 10y}}$

A2	Ausführliche Lösung	
	c)	$\frac{(a^2 + 2ab + b^2)^3}{(a+b)^3} = \left[\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a+b} \right]^3 = \left[\frac{(a+b)^2}{a+b} \right]^3 = \underline{\underline{(a+b)^3}}$

A3	Aufgabe	
	Berechnen Sie die folgenden Terme	
	a)	$\frac{(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)^m}{(a-b)^m}$
	b)	$\frac{x^4y^5 - x^3y^4 + x^2y^3}{x^2y^2}$

A3	Ausführliche Lösung	
	a)	$\frac{(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)^m}{(a-b)^m} = \left[\frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{a-b} \right]^m$ <p>Teillösung durch Polynomdivision</p> $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) : (a-b) = a^2 - 2ab + b^2$ $\begin{array}{r} (a^3 - a^2b) \\ \hline -2a^2b + 3ab^2 \\ -(-2a^2b + 2ab^2) \\ \hline ab^2 - b^3 \\ -(ab^2 - b^3) \\ \hline 0 \end{array}$ $\Rightarrow \left[\frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{a-b} \right]^m = \left(\frac{a^2 - 2ab + b^2}{2. \text{ bin. Formel}} \right)^m$ $= \left[(a-b)^2 \right]^m = \underline{\underline{(a-b)^{2m}}}$

A3	Ausführliche Lösung	
b)	$\frac{x^4y^5 - x^3y^4 + x^2y^3}{x^2y^2} = \frac{x^2y^2(x^2y^3 - xy^2 + y)}{x^2y^2} = \underline{\underline{x^2y^3 - xy^2 + y}}$	

A4	Aufgabe						
Berechnen Sie die folgenden Terme							
a)	$\sqrt{x^2y^2}$	b)	$\sqrt{a^2b^2c^2}$	c)	$\sqrt{4x^2y^2}$	d)	$\sqrt[3]{u^3v^3w^3}$
e)	$\sqrt[5]{x^{10}y^5z^{15}}$	f)	$\sqrt[4]{a^2b^4c^6}$	g)	$(x^4y^4)^{\frac{3}{2}}$	h)	$(27a^3b^6)^{\frac{1}{3}}$

A4	Ausführliche Lösungen		
a)	$\sqrt{x^2y^2} = (x^2y^2)^{\frac{1}{2}} = x^{2 \cdot \frac{1}{2}} y^{2 \cdot \frac{1}{2}} = \underline{\underline{xy}}$	b)	$\sqrt{a^2b^2c^2} = (a^2b^2c^2)^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{abc}}$

A4	Ausführliche Lösungen		
c)	$\sqrt{4x^2y^2} = (2^2x^2y^2)^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2xy}}$	d)	$\sqrt[3]{u^3v^3w^3} = (u^3v^3w^3)^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{uvw}}$

A4	Ausführliche Lösungen		
e)	$\sqrt[5]{x^{10}y^5z^{15}} = (x^{10}y^5z^{15})^{\frac{1}{5}} = \underline{\underline{x^2yz^3}}$	f)	$\sqrt[4]{a^2b^4c^6} = (a^2b^4c^6)^{\frac{1}{4}}$ $= \underline{\underline{a^{\frac{1}{2}}bc^{\frac{3}{2}}}} = \underline{\underline{\sqrt{a} \cdot bc \cdot \sqrt{c}}}$

A4	Ausführliche Lösungen		
g)	$(x^4y^4)^{\frac{3}{2}} = x^{4 \cdot \frac{3}{2}} y^{4 \cdot \frac{3}{2}} = x^6y^6 = \underline{\underline{(xy)^6}}$	h)	$(27a^3b^6)^{\frac{1}{3}} = (3^3a^3b^6)^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{3ab^2}}$

A5	Aufgabe		
Berechnen Sie die folgenden Terme			
a)	$\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} + 4\sqrt{3}$	b)	$\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{b} + 2\sqrt[3]{y} - 3\sqrt[3]{b}$
c)	$\left[(a+b)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}} \cdot \left[(a+b)^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}$	d)	$\frac{3\sqrt{a^3} \cdot 2\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[4]{a} \cdot a^{\frac{3}{4}}}$
e)	$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt[12]{x^{-18}}$	f)	$(n+x)^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{(n+x)^5}$

A5	Ausführliche Lösungen		
a)	$\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ $= \sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2}$ $= \underline{\underline{5\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}}$	b)	$\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{b} + 2\sqrt[3]{y} - 3\sqrt[3]{b}$ $= \sqrt[3]{y} + 2\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{b} - 3\sqrt[3]{b}$ $= \underline{\underline{3\sqrt[3]{y} - 4\sqrt[3]{b}}}$

A5 Ausführliche Lösungen	
c)	d)
$\left[(a+b)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}} \cdot \left[(a+b)^{-\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}$ $= \left(a+b^{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}} \right) (a+b)^{-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}}$ $= (a+b)(a+b)^{-\frac{1}{2}}$ $= (a+b)^{1-\frac{1}{2}}$ $= \underline{\underline{(a+b)^{\frac{1}{2}}}}$	$\frac{3\sqrt{a^3} \cdot 2\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a \cdot a^4}}$ $= \frac{3a^{\frac{3}{2}} \cdot 2a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}}$ $= \frac{6a^{\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}}{a^1} \stackrel{HN=6}{=} \frac{6a^{\frac{9}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6}}}{a}$ $= \frac{6a^{\frac{18}{6}}}{a} = \frac{6a^3}{a} = \underline{\underline{6a^2}}$

A5 Ausführliche Lösungen	
e)	f)
$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt[12]{x^{-18}} = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{5}{6}} \cdot x^{-\frac{18}{12}} \stackrel{HN=6}{=}$ $= x^{\frac{4}{6}} \cdot x^{\frac{5}{6}} \cdot x^{-\frac{9}{6}}$ $= x^{\frac{4+5-9}{6}}$ $= \underline{\underline{x^0 = 1}}$	$(n+x)^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{(n+x)^5} = (n+x)^{\frac{3}{4}} \cdot (n+x)^{\frac{5}{4}}$ $= (n+x)^{\frac{3+5}{4}}$ $= (n+x)^{\frac{8}{4}}$ $= \underline{\underline{(n+x)^2}}$

A6 Aufgabe	
Berechnen Sie die folgenden Terme	
a)	b)
$\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot 2x^{\frac{2}{3}} \cdot 5\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^4}}{x^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{x^3}}$	$\frac{a^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{a^7}}{a^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{a^3} \cdot \sqrt[4]{a^3}}$

A6 Ausführliche Lösungen	
a)	b)
$\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot 2x^{\frac{2}{3}} \cdot 5\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^4}}{x^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{x^3}}$ $= \frac{2 \cdot 5x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{3}{4}}} \text{HN=6}$ $= \frac{10x^{\frac{9}{6}} \cdot x^{\frac{4}{6}} \cdot x^{\frac{3}{6}} \cdot x^{\frac{8}{6}}}{x^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}}$ $= \frac{10x^{\frac{9}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{8}{6}}}{x^1} = \frac{10x^{\frac{24}{6}}}{x^1}$ $= \frac{10x^4}{x} = \underline{\underline{10x^3}}$	$\frac{a^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{a^7}}{a^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{a^3} \cdot \sqrt[4]{a^3}}$ $= \frac{a^{\frac{4}{5}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{2}{2}} \cdot a^{\frac{3}{4}}}$ $= \frac{a^{\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{7}{3}}}{a^{\frac{3}{4} + \frac{2}{2} + \frac{3}{4}}} \text{HN=15}$ $= \frac{a^{\frac{12}{15} + \frac{10}{15} + \frac{9}{15} + \frac{9}{15} + \frac{35}{15}}}{a^{\frac{3}{4} + \frac{2}{2} + \frac{3}{4}}} \text{HN=4}$ $= \frac{a^{\frac{75}{15}}}{a^{\frac{3}{4} + \frac{6}{4} + \frac{3}{4}}} = \frac{a^5}{a^{\frac{12}{4}}}$ $= \frac{a^5}{a^3} = \underline{\underline{a^2}}$

A7 Aufgabe	
Berechnen Sie die folgenden Terme	
a)	$x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{2}{3}}$
b)	$(a+b)^{\frac{1}{2}} + (a+b)^{\frac{2}{3}} - (a-b)^{\frac{1}{2}} + (a+b)^{\frac{2}{3}} - (a+b)^{\frac{1}{2}} + (a-b)^{\frac{1}{2}}$
c)	$\sqrt{a+b} + \sqrt[3]{a+b} - \sqrt{a-b} + \sqrt[3]{a-b} - 3\sqrt[3]{a+b} + 2\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$

A7 Ausführliche Lösung	
a)	$x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{2}{3}} \text{ sortieren}$ $= x^{\frac{1}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{6x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{1}{2}}}}$

A7 Ausführliche Lösung	
b)	$(a+b)^{\frac{1}{2}} + (a+b)^{\frac{2}{3}} - (a-b)^{\frac{1}{2}} + (a+b)^{\frac{2}{3}} - (a+b)^{\frac{1}{2}} + (a-b)^{\frac{1}{2}} \text{ sortieren}$ $= (a+b)^{\frac{1}{2}} - (a-b)^{\frac{1}{2}} - (a+b)^{\frac{1}{2}} + (a-b)^{\frac{1}{2}} + (a+b)^{\frac{2}{3}} + (a+b)^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{2(a+b)^{\frac{2}{3}}}}$

A7 Ausführliche Lösung	
c)	$\sqrt{a+b} + \sqrt[3]{a+b} - \sqrt{a-b} + \sqrt[3]{a-b} - 3\sqrt[3]{a+b} + 2\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} \text{ sortieren}$ $= \sqrt{a+b} + 2\sqrt{a+b} + \sqrt[3]{a+b} - 3\sqrt[3]{a+b} - \sqrt{a-b} + \sqrt{a-b} + \sqrt[3]{a-b}$ $= \underline{\underline{3\sqrt{a+b} - 2 \cdot \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}}}$