Lage zweier Geraden zueinander

Ein Gleichungssystem aus zwei linearen Gleichungen hat bekanntlich entweder **eine**, **keine** oder **unendlich viele** Lösungen.
Was aber hat das mit der Lage zweier Geraden zueinander zu tun?
Ein Fallbeispiel soll zur Klärung dienen.

Beispiel

Ein Ökokühlschrank (1) kostet 400 € und hat monatliche Energiekosten von 20 €.
Ein Billigkühlschrank (2) kostet 200 € und hat monatliche Energiekosten von 40 €.
Nach welcher Zeit hat sich der in der Anschaffung teuere Ökokühlschrank bezahlt gemacht (sich amortisiert)?

Die Funktionsgleichungen für die Kostenentwicklung lauten:
Für den Ökokühlschrank:
(1) $K_1(x) = 20x + 400 \;\; (x = \text{Zeit in Monaten, } K_1(x) \text{ in €})$.
Für den Billigkühlschrank:
(2) $K_2(x) = 40x + 200 \;\; (x = \text{Zeit in Monaten, } K_2(x) \text{ in €})$.
Der in der Anschaffung teuere Ökokühlschrank hat sich dann amortisiert, wenn die Gesamtkosten (Anschaffungskosten und Energiekosten) gleich, bzw. geringer sind als die des Billigkühlschrankes.
Kostengleichheit herrscht, falls $K_1(x) = K_2(x)$.

$K_1(x) = K_2(x)$

$\Leftrightarrow 20x + 400 = 40x + 200 \mid -400$

$\Leftrightarrow 20x = 40x - 200 \mid -40x$

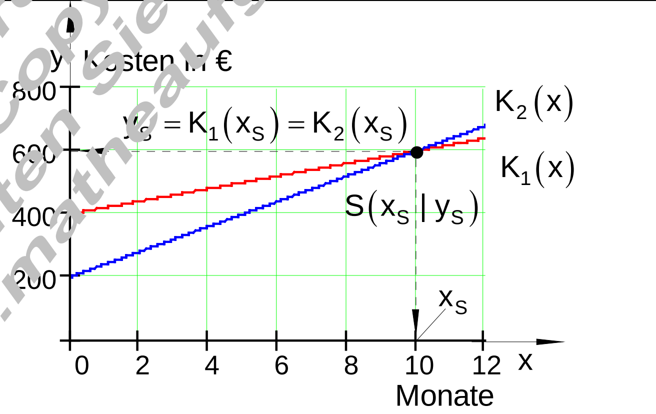
$\Leftrightarrow -20x = -200 \mid : (-20) \Leftrightarrow x = 10$

eingesetzt in $K_1(x)$

$\Rightarrow K_1(10) = 20 \cdot 10 + 400 = 600$

eingesetzt in $K_2(x)$

$\Rightarrow K_2(10) = 40 \cdot 10 + 200 = 600$



Ergebnis: Das Gleichungssystem
$K_1(x) = 20x + 400$ und $K_2(x) = 40x + 200$
wurde durch das Gleichsetzungsverfahren gelöst.
Der Wert x = 10 bedeutet, nach 10 Monaten hat sich der Ökokühlschrank amortisiert.
Der Wert y = 600 bedeutet, für beide Kühlschränke sind nach 10 Monaten die gleichen Kosten entstanden (600 €).
Ab jetzt sind die Gesamtkosten für den Ökokühlschrank geringer.

Um den Schnittpunkt zweier Geraden zu bestimmen ist stets ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen zu lösen.

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne diesen Copyright-Vermerk erhalten Sie unter: http://www.matheaufgaben-du.de

Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 \quad g(x) = \frac{1}{2}x - 1$$

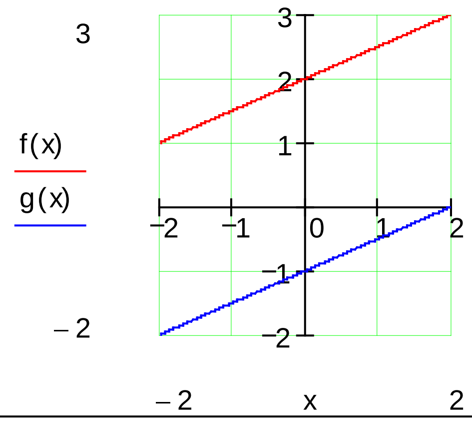
$$f(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{2}x - 1 \,\Big|\, -\frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 = -1 \text{ Widerspruch}$$

Die Lösung führt auf einen Widerspruch. Das bedeutet, das Gleichungssystem hat keine Lösung.

$$f(x) = 0,5x + 2 \quad g(x) = 0,5x - 1$$



Die Funktionsgleichung g(x) entsteht aus f(x) durch Verschiebung um drei Einheiten nach unten.
Das bedeutet, der Graph von g(x) ist parallel zu dem von f(x).
Zwei parallele Gerade haben offensichtlich keinen gemeinsamen Schnittpunkt.

Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2;\, g(x) = \frac{1}{2}(x + 2) + 1$$

Schnittpunkt: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{2}(x + 2) + 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{2}x + 1 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{2}x + 2$$

$\frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{2}x + 2$ ist eine wahre Aussage für alle $x \in \mathbb{R}$

Beide Geraden haben unendlich viele gemeinsame Punkte, sie liegen aufeinander, sind identisch.

Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen.
Um den Schnittpunkt zweier Geraden zu bestimmen, sind deren Funktionsgleichungen, die ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen bilden, zu lösen. Das kann mit dem Gleichsetzungsverfahren geschehen.

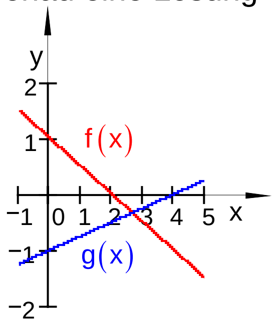
Merke

Hat f(x) = g(x) genau eine Lösung, dann schneiden sich die Graphen von f und g in einem Punkt. Die Geraden haben unterschiedliche Steigungen.

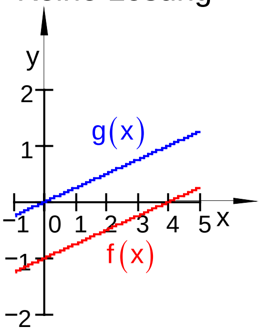
Hat f(x) = g(x) keine Lösung, dann haben beide Geraden keinen gemeinsamen Punkt. Sie verlaufen parallel zueinander.

Hat f(x) = g(x) unendlich viele Lösungen, dann sind beide Geraden identisch.

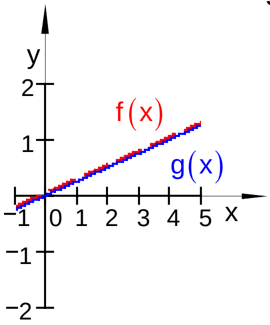
Genau eine Lösung



Keine Lösung



Unendlich viele Lösungen

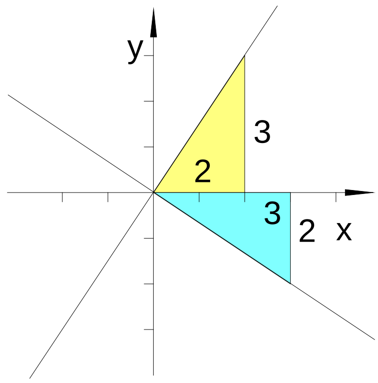


Rechtwinklig zueinander verlaufende Geraden

Ermittelt man die Steigung von zwei sich rechtwinklig schneidenden Geraden, so ist zu vermuten, dass es zwischen den Steigungen beider Geraden einen Zusammenhang gibt.

Vorübung:

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion
$f(x) = \frac{3}{2}x$
in ein Koordinatensystem.
Zeichnen Sie zu diesem Graphen mit dem Geodreieck eine senkrechte Gerade durch den Koordinatenursprung und lesen Sie deren Steigung ab.



Steigung der Geraden g: $a_{1g} = \frac{3}{2}$ Vermutung: Steigung der Geraden h: $a_{1h} = -\frac{2}{3}$

a_{1h} stellt den negativen Kehrwert von a_{1g} dar.

Man spricht hier vom einem negativ- reziproken Steigungsverhältnis.

Das bedeutet: $a_{1h} = -\frac{1}{a_{1g}}$ bzw. $a_{1g} \cdot a_{1h} = -1$ oder $a_{1g} = -\frac{1}{a_{1h}}$

Satz

Für die Steigung zweier senkrecht aufeinander stehender Geraden g und h gilt:

$a_{1g} \cdot a_{1h} = -1$ bzw. $a_{1g} = -\frac{1}{a_{1h}}$ oder $a_{1h} = -\frac{1}{a_{1g}}$

Die Geraden sind **zueinander orthogonal.**

Beweis:
Die Steigungen von g und h lassen sich ablesen zu:

$a_{1g} = \frac{q}{h}$ und $a_{1h} = -\frac{p}{h}$

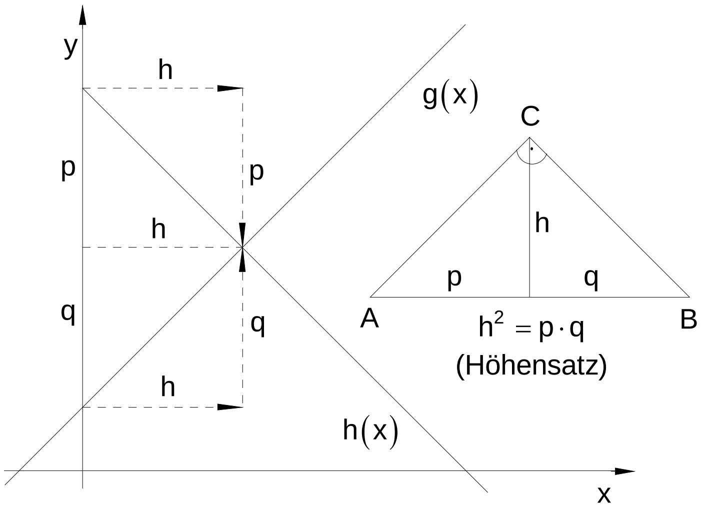
$a_{1g} \cdot a_{1h} = \frac{q}{h} \cdot (-\frac{p}{h}) = -\frac{q \cdot p}{h^2} \quad (1)$

Nach dem Höhensatz ist

$h^2 = p \cdot q$ einsetzen in (1)

$a_{1g} \cdot a_{1h} = -\frac{q \cdot p}{h^2} = -\frac{h^2}{h^2} = -1$

$\Rightarrow a_{1g} \cdot a_{1h} = -1$



Beispiel

Gegeben ist der Schnittpunkt S(2 | 3) zweier rechtwinklig zueinander verlaufender Geraden g und h, wobei die Steigung von g

$a_{1g} = \frac{1}{2}$ ist.

Gesucht:

Die Funktionsgleichung g(x) der Geraden g.
Die Funktionsgleichung h(x) der Geraden h.
Die Graphen von g und h für

$D = \{ x \mid -5 \le x \le 4 \}_{\mathbb{R}}$

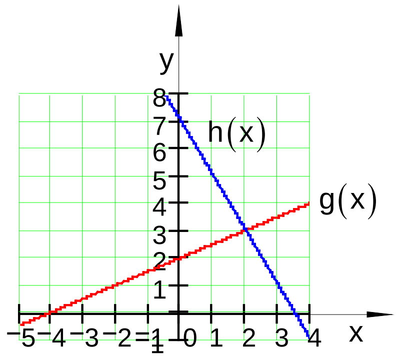
$a_{1g} = \frac{1}{2}$ wegen $g(x) \perp h(x)$ folgt $a_{1h} = -2$

$g(x) = \frac{1}{2}x + a_{0g}$ und $h(x) = -2x + a_{0h}$

$S(2|3) \Rightarrow g(2) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 + a_{0g} = 3 \Leftrightarrow a_{0g} = 2$

$S(2|3) \Rightarrow h(2) = 3 \Leftrightarrow -2 \cdot 2 + a_{0h} = 3 \Leftrightarrow a_{0h} = 7$

$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x + 2$ und $h(x) = -2x + 7$



Training :LINFKT_03

Gegeben sind die Funktionsgleichungen zweier Geraden $g_1(x)$ und $g_2(x)$.
Berechnen Sie den Schnittpunkt beider Geraden und zeichnen Sie die Geraden in ein Koordinatensystem.

1.)	$g_1(x)=\frac{1}{2}x+2 \qquad g_2(x)=-\frac{1}{2}x+4$	2.)	$g_1(x)=2x-1 \qquad g_2(x)=-2x+1$
3.)	$g_1(x)=\frac{3}{4}x-4 \qquad g_2(x)=-\frac{1}{2}x-1$	4.)	$g_1(x)=-\frac{1}{2}x+2 \qquad g_2(x)=\frac{1}{2}x+3$
5.)	$g_1(x)=\frac{2}{3}x+2 \qquad g_2(x)=\frac{1}{2}x+3$	6.)	$g_1(x)=\frac{3}{4}x+1 \qquad g_2(x)=\frac{1}{2}x+2$

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Geraden $g_1(x)$.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der zu $g_1(x)$ senkrecht verlaufenden Geraden, wenn diese durch den Punkt P_1 verläuft. Berechnen Sie den Schnittpunkt beider Geraden und zeichnen Sie beide Geraden in ein Koordinatensystem.

7.)	$g_1(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ gesucht wird: $g_2(x)\perp g_1(x)$ durch $P_1(3\,\vert\,-2)$	8.)	$g_1(x)=2x-1$ gesucht wird: $g_2(x)\perp g_1(x)$ durch $P_1(-2\,\vert\,5)$
9.)	$g_1(x)=-\frac{4}{5}x+3$ gesucht wird: $g_2(x)\perp g_1(x)$ durch $P_1(-4\,\vert\,-2)$	10.)	$g_1(x)=2x+3$ gesucht wird: $g_2(x)\perp g_1(x)$ durch $P_1(2\,\vert\,-3)$

Anwendungen aus der Kostenrechnung

Für einen Unternehmer ist es wichtig, diejenige Produktionsmenge **x** einer Ware zu kennen, bei der die ihm bei der Produktion entstandenen Kosten **K** durch die Erlöse **E** aus dem Verkauf (Absatz) gedeckt sind. Anders ausgedrückt, er interessiert sich dafür, ab welcher produzierten Menge x er Gewinn **G** macht.

Definition Für die **Kostenfunktion K(x)** bei konstanten Stück- und Fixkosten gilt:
$\text{Gesamtkosten } K(x) = \text{ Stückkosten } k \cdot \text{Produktionsmenge } x + \text{ fixe Kosten } K_f$
$K(x)=k\cdot x+K_f$ falls Stückkosten und Fixkosten konstant.

Merke **Gesamtkosten**, beschrieben durch die ertragliche Kostenfunktion K(x) sind die in einem Betrieb bei der Produktion von x Mengeneinheiten (ME) eines Produktes entstehenden Kosten.
Stückkosten k sind die Gesamtkosten pro Stück (auch variable Stückkosten genannt).
Fixe Kosten K_f sind die Kosten, die auch dann entstehen, wenn nichts produziert wird. (Zinsen, Mieten, Versicherungen, Gehälter usw.)

Definition Für die **Erlösfunktion E(x)** bei konstantem Preis gilt:
$\text{Erlös } E(x) = \text{ Preis } p \cdot \text{Menge } x$ also $E(x)=p\cdot x$

Merke Die zu dem Preis p verkaufte Menge nennt man auch **Ausbringungsmenge**.

Definition Für die **Gewinnfunktion G(x)** gilt:
Gewinn $G(x)=E(x)-K(x)$

Merke Ist das Ergebnis von G(x) negativ, macht der Betrieb Verlust, ist G(x) positiv, dann macht er Gewinn. Falls G(x) = 0 ist, sind die Kosten K(x) genauso hoch wie der Erlös E(x). Dieser Punkt wird **Gewinnschwelle** genannt.

Beispiel	
Ein Betrieb produziert „Handys“ zu 20€ pro Stück. Die fixen Betriebskosten belaufen sich auf 60000 € pro Tag. Der Verkaufspreis pro „Handy“ beträgt 40 €. Maximal kann der Betrieb täglich 4000 „Handys“ herstellen (Kapazitätsgrenze).	
a)	Ab welcher Ausbringungsmenge macht der Betrieb Gewinn?
b)	Bei welcher Ausbringungsmenge erzielt der Betrieb den maximalen Gewinn?
c)	Stellen Sie den Sachverhalt graphisch in einem geeigneten Koordinatensystem dar.

Lösung

a) Funktionsgleichungen aufstellen:

Kostenfunktion: $K(x) = 20x + 60000$

Erlösfunktion: $E(x) = 40x$

Gewinnfunktion:

$G(x) = E(x) - K(x) = 40x - 20x - 60000$
$= 20x - 60000$

Ansatz: $G(x) > 0$

$\Leftrightarrow 20x - 60000 > 0 \mid +60000$

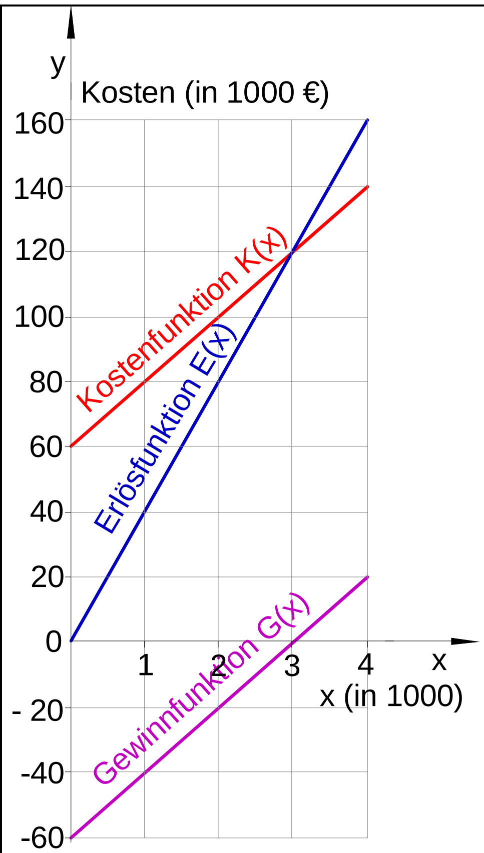
$\Leftrightarrow 20x > 60000 \mid :20 \Leftrightarrow x > 3000$

Ab einer Ausbringungsmenge von $x = 3000$ "Handys" pro Tag macht der Betrieb Gewinn.
Bei $x = 3000$ sind die Kosten $K(x)$ genauso hoch wie der Erlös $E(x)$.

$K(3000) = 20 \cdot 3000 + 60000 = 120000$

$E(3000) = 40 \cdot 3000 = 120000$

c)



b) Gewinnermittlung bei maximaler Ausbringungsmenge $x_{Max} = 4000$.

$G(4000) = 20 \cdot 4000 - 60000 = 20000$

Bei einer Ausbringungsmenge von 4000 „Handys“ pro Tag ist der Gewinn maximal, er beträgt dann 20000 €.

Die Gewinnschwelle kann statt über die Gewinnfunktion auch über den Schnittpunkt des Graphen der Kostenfunktion mit dem Graphen der Erlösfunktion ermittelt werden.
Die x- Koordinate des Schnittpunktes ist die Gewinnschwelle, die y- Koordinate gibt die Kosten an dieser Stelle an.

Mengen- und Geldeinheiten

Die in einem Betrieb produzierte Menge eines Produktes beläuft sich oft auf große Stückzahlen, z.B 1000 000 Cd- Rohlinge pro Tag. Auch Kosten für Produktionsprozesse fallen häufig in Millionenhöhe an.

Solch große Zahlen sind bei Rechnungen nicht immer leicht zu handhaben. Deshalb führt man für die produzierte Stückzahl Mengeneinheiten und für Kosten Geldeinheiten ein.

Dabei kann man z. B. 1000 000 CD- Rohlinge zu 10 Mengeneinheiten (10 ME) zusammenfassen, wobei eine Mengeneinheit für 100 000 Stück steht.
Ebenso fasst man Kosten zu Geldeinheiten zusammen, z. B. können 9000 000 € zu 9 Geldeinheiten (9 GE) zu je 1000 000 € zusammengefasst werden.

Außerdem ist man bei der Kostenbetrachtung an keine bestimmte Währung gebunden. Man betrachtet lediglich Geldeinheiten.

Beispiel
Die Kostenfunktion für die Herstellung eines bestimmten Produktes sei K(x) = 0,3x + 4 und die Erlösfunktion E(x) = 1,1x. Wie hoch sind die Gesamtkosten an der Gewinnschwelle?.
Lösung
$G(x) = E(x) - K(x) = 1{,}1x - 0{,}3x - 4 = 0{,}8x - 4$ Gewinnschwelle: $G(x) > 0 \Leftrightarrow 0{,}8x - 4 > 0 \mid +4 \Leftrightarrow 0{,}8x > 4 \mid : 0{,}8 \Leftrightarrow x = 5$ Gesamtkosten: $K(5) = 0{,}3 \cdot 5 + 4 = 1{,}5 + 4 = 5{,}5$ Die Gewinnschwelle liegt bei 5 ME, an dieser betragen die Kosten 5,5 GE.