Lösung alltäglicher Probleme mittels linearer Funktionen

1.	Tobias und Mario arbeiten als Krankenpfleger in einer Rehabilitationsklinik und beziehen das gleiche Grundgehalt. Zur Zeit müssen beide viel Überstunden leisten. Am Monatsende vergleichen sie ihre Gehaltsabrechnungen. Der Bruttolohn von Tobias beträgt 3559 €, der von Mario 3223 €. Tobias hat im laufenden Monat 43 Überstunden, Mario dagegen nur 27 Überstunden geleistet. Berechnen Sie das Grundgehalt und die Überstundenpauschale.

A1 Ausführliche Lösung

Anzahl der Überstunden: x   Ausgezahlter Bruttolohn f(x)

Gegeben sind zwei Wertepaare:

$P_1(43\,|\,3559)$ und $P_2(27\,|\,3223)$

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3223 - 3559}{27 - 43} = \frac{-336}{-16} = 21 \Rightarrow f(x) = 21x + a_0$$

$(a_1 = \text{Überstundenpauschale} \quad a_0 = \text{Grundgehalt})$

$$P_1(43\,|\,3559) \Rightarrow f(43) = 3559 \Leftrightarrow 21 \cdot 43 + a_0 = 3559$$
$$\Leftrightarrow 903 + a_0 = 3559 \;|\; -903$$
$$\Leftrightarrow a_0 = 2656$$
$$\Rightarrow f(x) = 21x + 2656$$

Das Grundgehalt beträgt 2656 €, die Überstundenpauschale 21 €.

2.		Ein Energieversorgungsunternehmen bietet seinen Kunden zu folgenden Bedingungen Strom an: Eine kWh kostet 0,14 € bei einer monatlichen Grundgebühr von 7,50 €.
	a)	Stellen Sie einen Funktionsterm auf. Zeichnen Sie den Graphen für die Abnahme bis zu 200 kWh in ein geeignetes Koordinatensystem.
	b)	Die Stromrechnung für 4 Monate beläuft sich auf 150,40 €. Wie viel kWh wurden bezogen?
	c)	Ein Zweitanbieter verkauft Strom für 0,10 € pro kWh bei einer monatlichen Grundgebühr von 10 €. Ab welcher Abnahme lohnt sich der Wechsel des Stromanbieters?

A2 Ausführliche Lösung

a) Ansatz:

1 kWh: $0{,}14 \cdot 1 + 7{,}50$

2 kWh: $0{,}14 \cdot 2 + 7{,}50$

....

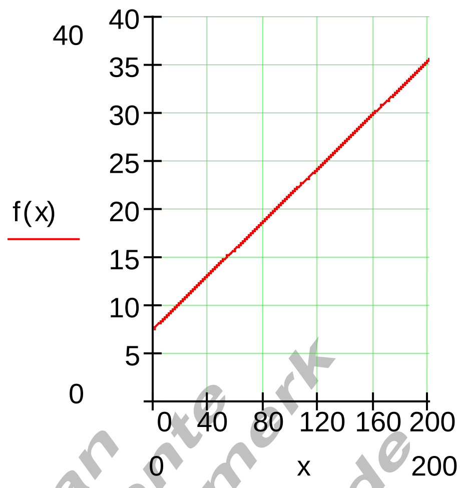
x kWh: $0{,}14 \cdot x + 7{,}50$

Funktionsterm:

$$\underline{\underline{f(x) = 0{,}14 \cdot x + 7{,}50}}$$

$x \triangleq \text{kWh}\,;\ f(x) \triangleq €$

Bemerkung:
Die Rechnung erfolgt ohne Einheiten, diese werden den jeweiligen Ergebnissen angefügt.



A2 Ausführliche Lösung

b) Ansatz: $f(x) = 0{,}14x + 7{,}50$ gilt für die monatliche Abrechnung.

Für 4 Monate betragen die Grundgebühren 30 €.

$\Rightarrow f_4(x) = 0{,}14x + 30 \quad P(x\,|\,150{,}4)$

$\Rightarrow f_4(x) = 0{,}14x + 30 = 150{,}4$

$\Leftrightarrow 0{,}14x + 30 = 150{,}4 \,|\, -30$

$\Leftrightarrow 0{,}14x = 120{,}4 \,|\, : 0{,}14$

$\Leftrightarrow x = 860$

Der Energiebezug in 4 Monaten betrug $\underline{\underline{860\ \text{kWh}}}$

A2 Ausführliche Lösung

c) Ansatz:

1 kWh: $0{,}14 \cdot 1 + 7{,}50$

2 kWh: $0{,}14 \cdot 2 + 7{,}50$

....

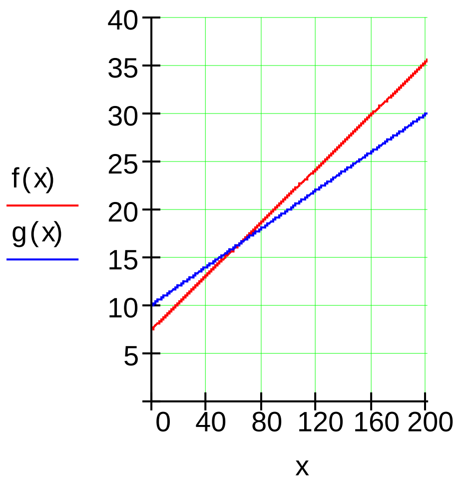
x kWh: $0{,}14 \cdot x + 7{,}50$

Funktionsterm:

$$\underline{\underline{f(x) = 0{,}14 \cdot x + 7{,}50}}$$

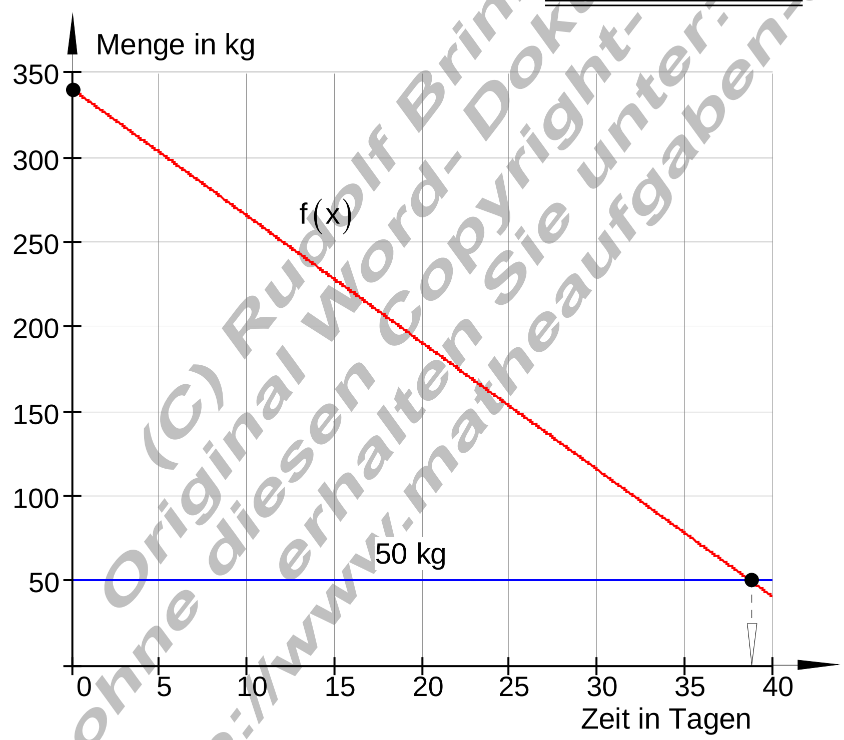
$x \triangleq \text{kWh}\,;\ f(x) \triangleq €$

Bei einem monatlichen Energiebezug
von mehr als 62,5 kWh ist Anbieter II günstiger als Anbieter I.



3.		Zur Versorgung der Futterautomaten im Zoo „Koalabär“ benötigt der Tierpfleger täglich 7,5 kg Tierfutter. Zwölf Tage, nachdem das Futterlager zum letzten Mal aufgefüllt wurde, befinden sich dort noch 250 kg.
	a)	Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf, die diesen Sachverhalt beschreibt und zeichnen Sie den dazugehörigen Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
	b)	Auf welche Menge wurde das Futterlager vor zwölf Tagen aufgefüllt?
	c)	Bei einem Lagerbestand von 50 kg wird der Bestand wieder auf die unter b) berechnete Menge aufgestockt. Wann ist das erforderlich?

A3		Ausführliche Lösung
	a)	x- Achse: Zeit in Tagen y- Achse: Futterbestand in kg
		$f(x) = -7{,}5x + a_0$
		$P(12 \mid 250) \Rightarrow f(12) = 250 \Leftrightarrow -7{,}5 \cdot 12 + a_0 = 250$
		$\Leftrightarrow -90 + a_0 = 250 \mid +90$
		$\Leftrightarrow a_0 = 340 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -7{,}5x + 340}}$



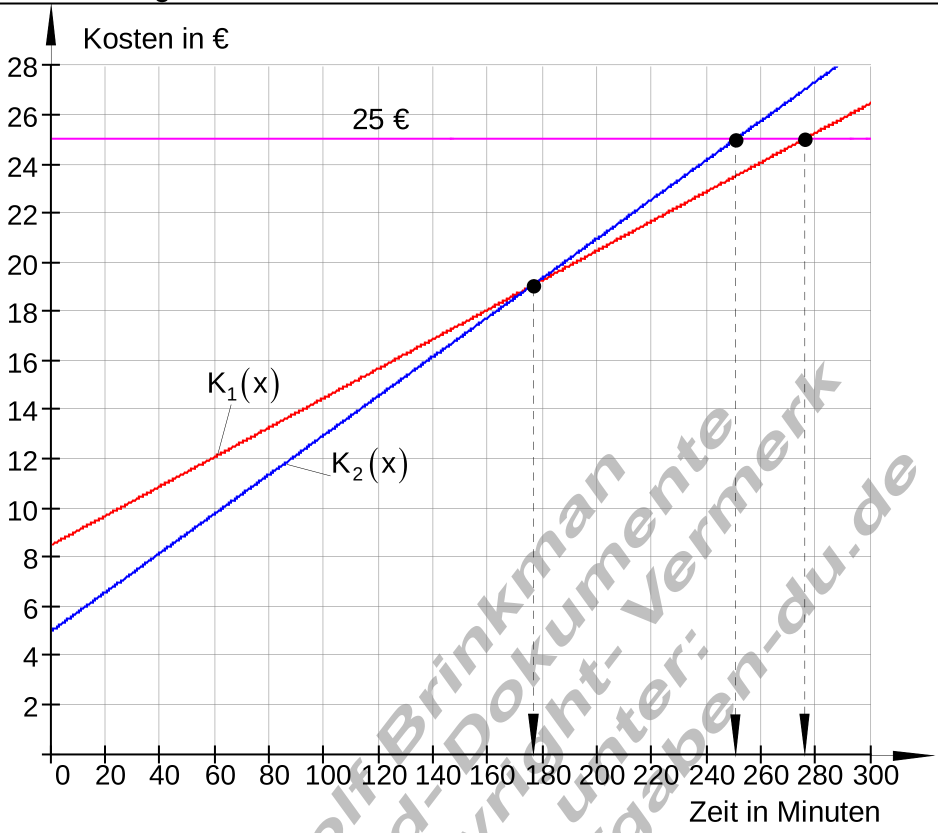
A3		Ausführliche Lösung
	b)	Der Auffüllzeitpunkt liegt bei x = 0.
		$\Rightarrow f(0) = -7{,}5 \cdot 0 + 340 = 340$
		Der Futterbestand wurde vor 12 Tagen auf 340 kg aufgefüllt.

A3	Ausführliche Lösung	
	c)	$f(x)=50 \Leftrightarrow -7{,}5x+340=50 \mid -340$ $\Leftrightarrow -7{,}5x=-290 \mid :(-7{,}5)$ $\Leftrightarrow x=\frac{580}{15}=\frac{116}{3}\approx 38{,}7$ Nach etwa 38,7 Tagen ist das Futterlager wieder aufzufüllen.

4.	Der Telefondienst „Handybillig“ (HB) bietet an: Jede Gesprächsminute kostet 0,06 €, bei einer monatlichen Grundgebühr von 8,50 €. Die Konditionen von „Handypreiswert“ (HP) lauten: Jede Gesprächsminute kostet 0,08 €, bei einer monatlichen Grundgebühr von 5 €. (Fertigen Sie eine Skizze an)	
	a)	Bei wie viel Minuten sind die Kosten bei beiden gleich?
	b)	Ihnen stehen 25 € monatlich zum Telefonieren zur Verfügung (Oma zahlt). Welchen Dienst wählen Sie und wie lange können Sie bei dem gewählten Anbieter telefonieren?
	c)	Stellen Sie die Ergebnisse von a) und b) im Koordinatensystem dar.

A4	Ausführliche Lösung	
	a)	$HB: K_1(x)=0{,}06x+8{,}5 \quad HP: K_2(x)=0{,}08x+5$ Kostengleichheit herrscht im Schnittpunkt beider Geraden. $K_2(x)=K_1(x) \Leftrightarrow 0{,}08x+5=0{,}06x+8{,}5 \mid -0{,}06x$ $\Leftrightarrow 0{,}02x+5=8{,}5 \mid -5$ $\Leftrightarrow 0{,}02x=3{,}5 \mid :0{,}02$ $\Leftrightarrow x=175$ $K_1(175)=0{,}06\cdot 175+8{,}5=19$ $K_2(175)=0{,}08\cdot 175+5=19$ Nach 175 Minuten herrscht Kostengleichheit (19 €).

A4	Ausführliche Lösung	
	b)	$HB:$ $K_1(x)=25 \Leftrightarrow 0{,}06x+8{,}5=25 \mid -8{,}5$ $\Leftrightarrow 0{,}06x=16{,}5 \mid :0{,}06$ $\Leftrightarrow x=275$ $HP:$ $K_2(x)=25 \Leftrightarrow 0{,}08x+5=25 \mid -5$ $\Leftrightarrow 0{,}08x=20 \mid :0{,}08$ $\Leftrightarrow x=250$ Der Dienst von HB ist günstig, denn für 25 € kann man 275 Minuten telefonieren. Hingegen reichen bei HP die 25 € nur für 250 Minuten.

A4	Ausführliche Lösung
	c) 

5.	Ein Betrieb kann täglich maximal 1500 Kühlschränke herstellen (Kapazitätsgrenze). Die fixen Kosten K_f betragen 90000 €. Die variablen Stückkosten sind konstant und betragen k_v = 300 €. Die Kühlschränke werden zu einem Preis von je 375 € verkauft.
a)	Ermitteln Sie die Kostenfunktion K(x), die Erlösfunktion E(x) und die Gewinnfunktion G(x) für den Betrieb.
b)	Bei welcher Ausbringungsmenge wird die Gewinnschwelle erreicht? Wie hoch sind an dieser Stelle die Gesamtkosten bzw. der Erlös?
c)	Wie groß ist der Gewinn an der Kapazitätsgrenze?

A5	Ausführliche Lösung
a)	Fixkosten: $K_f = 90\,000$ € variable Stückkosten: $k_v = 300$ € Absatzpreis: $p = 375$ € Kostenfuntion: $K(x) = k_v \cdot x + K_f = 300x + 90\,000$ Erlösfunktion: $E(x) = p \cdot x = 375 \cdot x$ Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x) = 75x - 90\,000$

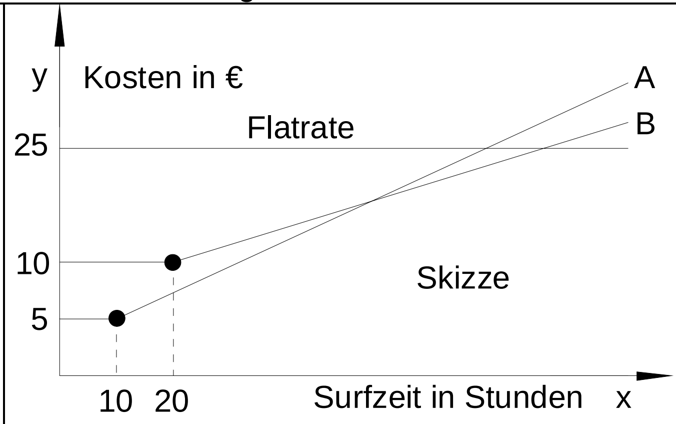
A5	Ausführliche Lösung	
	b)	Die Gewinnschwelle ist die Stelle, an der kein Gewinn gemacht wird. $G(x)=0 \Leftrightarrow 75x-90\,000=0 \mid +90\,000 \Leftrightarrow 75x=90\,000 \mid 75 \Leftrightarrow x=x_s=1\,200$ $E(x_s)=E(1\,200)=375\cdot 1\,200=450\,000=K(x_s)$ Ab einer täglichen Ausbringungsmenge von 1200 macht der Betrieb Gewinn. An der Gewinnschwelle sind die Kosten genau so hoch wie der Erlös (450 000 €).

A5	Ausführliche Lösung	
	c)	Gewinn an der Kapazitätsgrenze: $G(1\,500)=75\cdot 1\,500=22\,500$ An der Kapazitätsgrenze beträgt der Gewinn 22 500 €.

6.	Armin sieht sich die Tarife des Telefonanbieters „Billigsurf“ an. Tarif A: Grundgebühr 5 € / Monat die ersten 10 Stunden frei, dann 0,5 Ct. / min. Tarif B: Grundgebühr 10 € / Monat die ersten 20 Stunden frei, dann 0,4 Ct. / min. Tarif C: Flatrate 25 € / Monat. Durchschnittlich surft Armin zweieinhalb Stunden täglich	
	a)	Stellen Sie für jeden Tarif die Funktionsgleichung auf.
	b)	Zeichnen Sie die Funktionsgraphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
	c)	Erklären Sie, was alles aus den Graphen ablesbar ist (Interpretation).
	d)	Berechnen Sie den günstigsten Tarif für Armin.
	e)	In welchem Punkt herrscht Kostengleichheit für Tarif A und B?
	f)	Ab welcher Surfzeit sollte Armin die Flatrate wählen?

A6 Ausführliche Lösung

a)



x – Achse Zeit in Stunden y – Achse Kosten in €

Tarif A:

$0{,}5\ \text{Ct}/\text{min}$ sind $60\ \text{min}\cdot 0{,}5\ \text{Ct}/\text{min} = 30\ \text{Ct}/\text{h} = 0{,}3\ €/\text{h}$ (Steigung)

$\Rightarrow K_A(x) = 0{,}3x + a_0$

10 Freistunden bedeuten, in den ersten 10 Stunden
fallen nur die Grundgebühren von 5 € an. $\Rightarrow P(10\,|\,5)$

Durch diesen Punkt verläuft der Graph von $K_A(x)$.

$P(10\,|\,5) \Rightarrow K_A(10) = 5 \Leftrightarrow 0{,}3\cdot 10 + a_0 = 5\ |-3$

$\Leftrightarrow a_0 = 2$

Funktionsgleichung für Tarif A: $K_A(x) = 0{,}3x + 2$

Tarif B:

$0{,}4\ \text{Ct}/\text{min}$ sind $60\ \text{min}\cdot 0{,}4\ \text{Ct}/\text{min} = 24\ \text{Ct}/\text{h} = 0{,}24\ €/\text{h}$ (Steigung)

$\Rightarrow K_B(x) = 0{,}24x + a_0$

20 Freistunden bedeuten, in den ersten 20 Stunden
fallen nur die Grundgebühren von 10 € an. $\Rightarrow P(20\,|\,10)$

Durch diesen Punkt verläuft der Graph von $K_B(x)$.

$P(20\,|\,10) \Rightarrow K_B(20) = 10 \Leftrightarrow 0{,}24\cdot 20 + a_0 = 10$

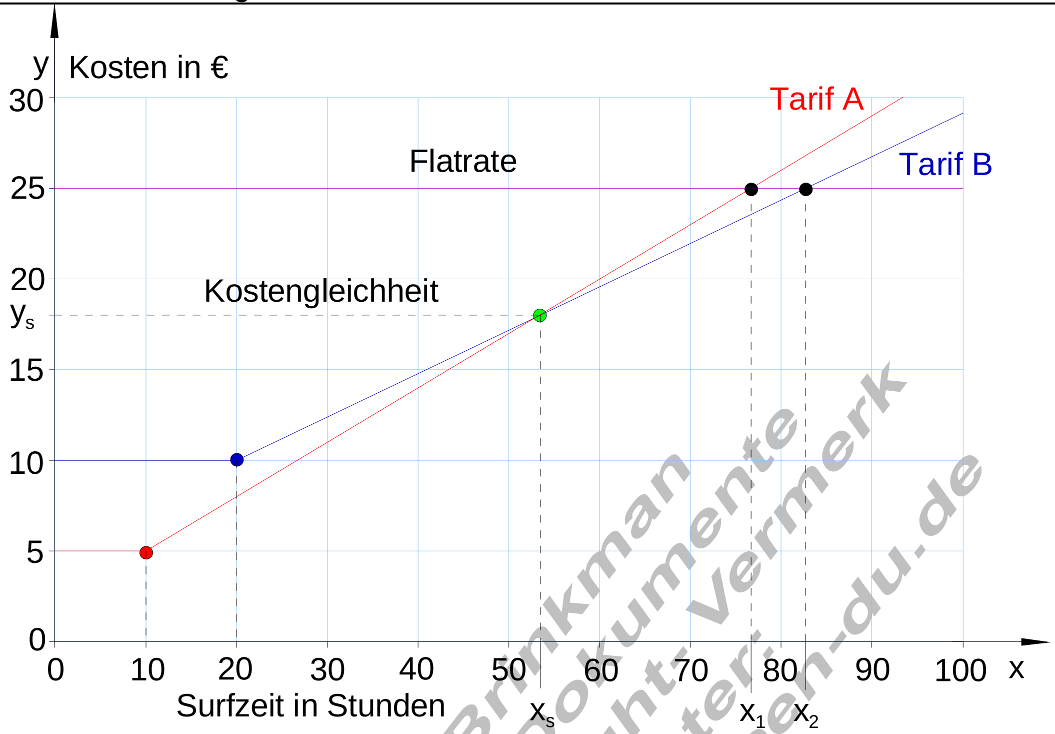
$\Leftrightarrow 4{,}8 + a_0 = 10\ |-4{,}8$

$\Leftrightarrow a_0 = 5{,}2$

Funktionsgleichung für Tarif B: $K_B(x) = 0{,}24x + 5{,}2$

Tarif C: Flatrate 25 € ist unabhängig von der Surfzeit.

Funktionsgleichung für Tarif C: $F(x) = 25$ (Parallele zur x – Achse)

A6	Ausführliche Lösung
	b) 

A6	Ausführliche Lösung
	c) Bei etwa 53 Stunden schneiden sich beide Geraden, in dem Punkt herrscht Kostengleichheit. Bis etwa 53 Stunden ist Tarif A der günstigste. Zwischen etwa 53 und 82 Stunden ist Tarif B der günstigste. Ab etwa 82 Stunden lohnt sich die Flatrate.

A6	Ausführliche Lösung
	d) Armin surft etwa 75 Stunden im Monat. Für ihn wäre bei dieser Surfdauer Tarif B der günstigste. Eine Rechnung soll das belegen: Monatliche Surfdauer $2{,}5\,\text{h} \cdot 30 = 75$ Stunden. Kosten bei Tarif A: $K_A(75) = 0{,}3 \cdot 75 + 2 = 24{,}50$ Kosten bei Tarif B: $K_B(75) = 0{,}24 \cdot 75 + 5{,}2 = 23{,}20$ Kosten bei Tarif C: $F(75) = 25$

A6	Ausführliche Lösung	
	e)	Kostengleichheit für Tarif A und B ist im Schnittpunkt beider Geraden zu finden. $K_A(x) = K_B(x) \Leftrightarrow 0{,}3x + 2 = 0{,}24x + 5{,}2 \mid -0{,}24x$ $\Leftrightarrow 0{,}06x + 2 = 5{,}2 \mid -2$ $\Leftrightarrow 0{,}06x = 3{,}2 \mid : 0{,}06$ $\Leftrightarrow x = x_s = \frac{320}{100} : \frac{6}{100} = \frac{320 \cdot 100}{100 \cdot 6} = \frac{320}{6} = \frac{160}{3}$ $= 53\frac{1}{3}$ (53 Stunden und 20 Minuten) $K_A\left(\frac{160}{3}\right) = \frac{3}{10} \cdot \frac{160}{3} + 2 = 16 + 2 = 18$ Kostengleichheit herrscht bei einer Surfzeit von 53 h und 20 min. Die für diese Zeit anfallenden Kosten betragen für beide Tarife 18 €.

A6	Ausführliche Lösung	
	f)	Aus den Graphen ist abzulesen, dass der Schnittpunkt von K_B (x) mit F (x) den Punkt markiert, ab dem für längere Surfzeiten die Flatrate günstiger ist als Tarif B. $K_B(x) = F(x) \Leftrightarrow 0{,}24x + 5{,}2 = 25 \mid -5{,}2$ $\Leftrightarrow 0{,}24x = 19{,}8 \mid : 0{,}24$ $\Leftrightarrow x = x_2 = 82{,}5$ Ab einer Surfdauer von 82,5 Stunden monatlich, sollte man auf die Flatrate umstellen.