Zusammenfassung lineare Funktionen

Allgemeine Funktionsgleichung der Geraden.

$f(x) = a_1x + a_0$ Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.

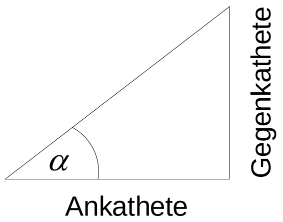
Achsenschnittpunkte:

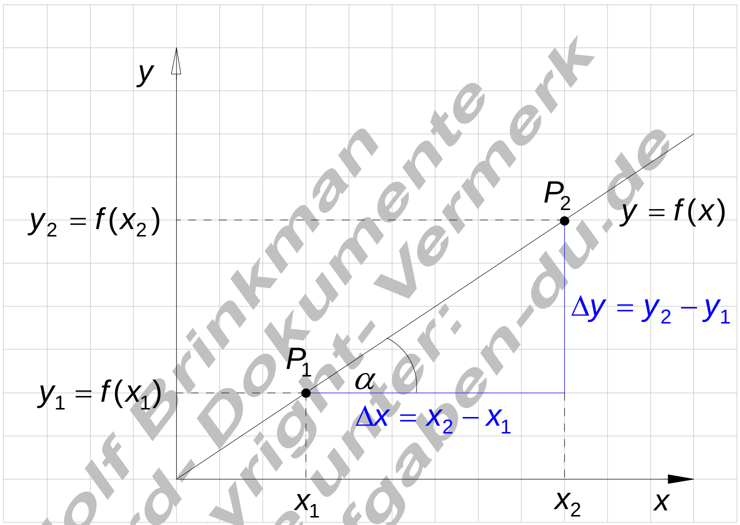
$y_s = f(0) \Rightarrow P_y(0 \mid y_s)$

$f(x) = 0 \Rightarrow P_x(x_s \mid 0)$ mit x_s als Nullstelle

Das Steigungsdreieck

$$\text{Steigung} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$





Steigung einer Geraden durch die Punkte $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \tan(\alpha)$$

Funktion aus gegebenen Bedingungen:

Fall I: Eine Gerade mit der Steigung a_1 verläuft durch den Punkt $P_1(x_1 \mid y_1)$.

Beispiel:

Steigung: $a_1 = 1{,}5$ Punkt: $P_1(-2 \mid 3)$

Ausgangsgleichung: $f(x) = a_1x + a_0$

Steigung einsetzen: $f(x) = 1{,}5 \cdot x + a_0$

Der Wert für a_0 ist zu berechnen.

Punktprobe für: $P_1(-2 \mid 3)$

$$\begin{aligned} f(-2) = 3 \quad &\Leftrightarrow \quad 1{,}5 \cdot (-2) + a_0 &&= 3 \\ &\Leftrightarrow \quad -3 + a_0 &&= 3 \mid +3 \\ &\Leftrightarrow \quad a_0 &&= 6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = 1{,}5 \cdot x + 6}}$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} &P_1(x_1 \mid y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \\ &\Leftrightarrow a_1 \cdot x_1 + a_0 = y_1 \mid -a_1 \cdot x_1 \\ &\Leftrightarrow a_0 = y_1 - a_1 \cdot x_1 \\ &\Rightarrow f(x) = a_1 \cdot x + y_1 - a_1 \cdot x_1 \\ &= a_1 \cdot x - a_1 \cdot x_1 + y_1 \\ &= a_1(x - x_1) + y_1 \end{aligned}$$

Punkt- Steigungsform:

$$f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$$

Fall II: Zwei Punkte $P_1(\, x_1 \mid y_1 \,)$ und $P_2(\, x_2 \mid y_2 \,)$ liegen auf einer Geraden.

Beispiel:

$P_1(-3 \mid -1) \quad P_2(4 \mid 6)$ Ausgangsgleichung: $f(x) = a_1 x + a_0$

Bestimmung der Steigung: $a_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{6-(-1)}{4-(-3)} = \dfrac{6+1}{4+3} = \dfrac{7}{7} = 1$

Steigung einsetzen: $f(x) = 1 \cdot x + a_0$ und Punktprobe für: $P_2(4 \mid 6)$ oder für P_1

$P_2(4 \mid 6) \Rightarrow f(4) = 6 \Leftrightarrow 1 \cdot 4 + a_0 = 6 \mid -4 \Leftrightarrow a_0 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = x + 2}}$

Oder die allgemeine Form der Geradengleichung durch zwei Punkte verwenden.

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

Sonderfälle für Geradengleichungen:

Parallele zur x- Achse im Abstand a_0:

$$f(x) = a_0$$

Parallele zur y- Achse im Abstand a:

$$x = a$$

Lage zweier Geraden zueinander:

Zwei Geraden f und g können sich schneiden, parallel zueinander oder identisch sein.

Lösungsansatz durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen f(x) = g(x).

Hat f(x) = g(x) genau eine Lösung, dann schneiden sich die Graphen von f und g in einem Punkt. Die Geraden haben unterschiedliche Steigungen.

Hat f(x) = g(x) keine Lösung, dann haben beide Geraden keinen gemeinsamen Punkt. Sie verlaufen parallel zueinander.

Hat f(x) = g(x) unendlich viele Lösungen, dann sind beide Geraden identisch.

Orthogonale Geraden (zwei Geraden stehen senkrecht aufeinander).

Für die Steigung zweier senkrecht aufeinander stehender Geraden g und h gilt:

$$a_{1g} \cdot a_{1h} = -1$$

bzw.

$$a_{1g} = -\frac{1}{a_{1h}}$$

oder

$$a_{1h} = -\frac{1}{a_{1g}}$$