Verfahren und Lösungsstrategien bei linearen Funktionen

Wie gehe ich vor, wenn ....

Fall I: die Steigung a sowie ein Punkt P_1 einer Geraden bekannt sind und die Funktionsgleichung berechnet werden soll.

Fall II: zwei Punkte P_1 und P_2 bekannt sind und die Funktionsgleichung berechnet werden soll.

Fall III: die Achsenschnittpunkte P_y und P_x einer Geraden, von der die Funktionsgleichung bekannt ist , bestimmt werden sollen.

Fall IV: der Schnittpunkt S zweier Geraden, von denen die Funktionsgleichungen bekannt sind, bestimmt werden soll.

Fall V: die Funktionsgleichung g(x) einer zu f(x) senkrecht verlaufenden Geraden zu bestimmen ist, die durch den Punkt P_1 verläuft.

Fall VI: aus dem Text einer Sachaufgabe die Funktionsgleichung aufzustellen ist.

Verfahren zu Fall I:

Die Steigung einer Geraden beträgt $a_1 = 0,75 = \frac{3}{4}$.

$f(x) = a_1 x + a_0$

Die Gerade soll durch den Punkt $P_1\left(\underbrace{2}_{x} \,\middle|\, \underbrace{4}_{y}\right)$ verlaufen.

Schritt 1: Steigung einsetzen $y = f(x) = \frac{3}{4}x + b$

Schritt 2: Mit den Koordinaten von P_1 den Wert für a_0 bestimmen.

$P_1(2\,|\,4): \quad y = f(2) = \frac{3}{4}\cdot 2 + a_0 = 4$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}\cdot 2 + a_0 &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2} + a_0 &= 4 \qquad \left|-\frac{3}{2}\right. \\ \Leftrightarrow a_0 &= 4 - \frac{3}{2} = \underline{\underline{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

Funktionsgleichung:

$$\underline{\underline{y = f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}}}$$

Punktprobe für $P_1(2\,|\,4)$:

$$y = f(2) = \frac{3}{4}\cdot 2 + \frac{5}{2} = 4$$

Verfahren zu Fall II:

Die Gerade verläuft durch die Punkte $P_1\,(-3\,|\,2)$ und $P_2\,(2\,|\,4)$.

$f(x) = a_1x + a_0$

Schritt 1: Steigung berechnen $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{2-(-3)} = \frac{2}{5}$

Schritt 2: Steigung einsetzen $y = f(x) = \frac{2}{5}x + a_0$

Schritt 3: Mit den Koordinaten von P_1 oder P_2 den Wert für a_0 bestimmen.

$P_2\,(2\,|\,4):\quad y = f(2) = \frac{2}{5}\cdot 2 + a_0 = 4$

$$
\begin{array}{lllll}
 & \frac{2}{5}\cdot 2 & +a_0 & = & 4 \\
\Leftrightarrow & \frac{4}{5} & +a_0 & = & 4 \qquad |-\frac{4}{5} \\
\Leftrightarrow & & a_0 & = & 4 - \frac{4}{5} = \underline{\underline{\frac{16}{5}}}
\end{array}
$$

Funktionsgleichung:

$\underline{\underline{y = f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{16}{5}}}$

Punktprobe für $P_1\,(-3\,|\,2)$:

$y = f(-3) = \frac{2}{5}\cdot(-3) + \frac{16}{5} = 2$

Verfahren zu Fall III:

Funktionsgleichung: $y = f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{16}{5}$

Schritt 1: Den Schnittpunkt mit der y - Achse bestimmen

$P_y\,(0\,|\,y_s):\quad y_s = f(0) = \frac{2}{5}\cdot 0 + \frac{16}{5} = \frac{16}{5} \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0\,\middle|\,\frac{16}{5}\right)}}$

Schritt 2: Den Schnittpunkt mit der x - Achse bestimmen

$P_x\,(x_s\,|\,0):\quad y = f(x_s) = \frac{2}{5}x_s + \frac{16}{5} = 0$

$$
\begin{array}{lllll}
 & \frac{2}{5}x_s & +\frac{16}{5} & = & 0 \qquad |-\frac{16}{5} \\
\Leftrightarrow & \frac{2}{5}x_s & & = & -\frac{16}{5} \quad |\cdot 5 \\
\Leftrightarrow & 2x_s & & = & -16 \quad |:2 \\
\Leftrightarrow & x_s & & = & \underline{\underline{-8}}
\end{array}
$$

Nullstelle:

$\underline{\underline{P_x\,(-8\,|\,0)}}$

Punktprobe für $P_x\,(-8\,|\,0)$

$y = f(-8) = \frac{2}{5}\cdot(-8) + \frac{16}{5} = 0$

Verfahren zu Fall IV:

Funktionsgleichungen: $y = f(x) = -\frac{2}{3}x + 4 \quad y = g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

Da der Schnittpunkt S (x_s | y_s) auf beiden Geraden liegt,
müssen die Schnittpunktkoordinaten beide Gleichungen erfüllen.

$y_s = -\frac{2}{3}x_s + 4 \ (\mathrm{I}) \qquad y_s = \frac{3}{2}x_s - \frac{5}{2} \ (\mathrm{II})$

Das sind zwei Gleichungen mit den Variablen x_s und y_s.
Die Lösung erfolgt mit dem Gleichsetzungsverfahren.

$$-\frac{2}{3}x_s + 4 = \frac{3}{2}x_s - \frac{5}{2} \mid -\frac{3}{2}x_s$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}x_s - \frac{3}{2}x_s + 4 = -\frac{5}{2} \mid -4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{6}x_s - \frac{9}{6}x_s = -\frac{5}{2} - \frac{8}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{13}{6}x_s = -\frac{13}{2} \mid \cdot \left(-\frac{6}{13}\right)$$

$$\Leftrightarrow x_s = \frac{13 \cdot 6}{2 \cdot 13} = 3 \mid \text{ einsetzen in } (\mathrm{II})$$

$$\Rightarrow y_s = \frac{3}{2} \cdot 3 - \frac{5}{2} = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S(3 \mid 2)}}$$

Probe: $y_s = -\frac{2}{3} \cdot 3 + 4 = -2 + 4 = 2$

Verfahren zu Fall V:

Funktionsgleichung: $y = f(x) = 3x - 6$ Punkt: $P_1(-3|3)$

Schritt 1: Steigung von $g(x)$ bestimmen:

Steigung von $f(x)$: $a_{1f} = 3 = \frac{3}{1}$

Steigung von $g(x)$: $a_{1g} = -\frac{1}{a_{1f}} = -\frac{1}{3}$

Schritt 2: Steigung in $g(x)$ einsetzen $y = g(x) = -\frac{1}{3}x + a_{0g}$

Schritt 3: Mit den Koordinaten von P_1 den Wert für a_{0g} bestimmen.

$P_1(-3|3)$: $y = g(-3) = -\frac{1}{3}\cdot(-3) + a_{0g} = 3$

$$
\begin{array}{llcll}
 & -\frac{1}{3}\cdot(-3) + a_{0g} & = & 3 & \\
\Leftrightarrow & 1 + a_{0g} & = & 3 & |-1 \\
\Leftrightarrow & a_{0g} & = & 3-1 = \underline{\underline{2}} &
\end{array}
$$

Funktionsgleichung:

$$\underline{\underline{y = g(x) = -\frac{1}{3}x + 2}}$$

Punktprobe für $P_1(-3|3)$:

$y = g(-3) = -\frac{1}{3}\cdot(-3) + 2 = 3$

Zu Fall VI gibt es kein bestimmtes Verfahren.
Die Lösung solcher Aufgaben erfordert viel Übung und etwas Geschick.
Hier ist logisches Denken die Voraussetzung dafür, den richtigen Ansatz zu finden.
Ist der Ansatz erst gefunden, dann lässt sich die Aufgabe fast immer mit einem oder mehreren der oben beschriebenen Verfahren lösen.

Beispiel 1:
Silvia bekommt nach bestandener Führerscheinprüfung von ihrer Tante 2510 € geschenkt. Ihr Traumauto kostet 6500 €. Sie kann monatlich 210 € zurücklegen.
Nach welcher Zeit hat sie das Geld für den Autokauf zusammen?
Der Ansatz erfolgt ähnlich wie in Beispiel 1 gezeigt.

1. Monat: $y = 2510 + 210\cdot 1 = 2720$

2. Monat: $y = 2510 + 210\cdot 2 = 2930$

x. Monat: $y = 2510 + 210\cdot x$

$\Rightarrow$ Funktionsgleichung: $y = f(x) = 210x + 2510$

Gesucht ist der Monat x an dem sie 6500 € zusammen hat.

$P(x|6500)$: $y = f(x) = 210x + 2510 = 6500$

Die Lösung der Gleichung $210x + 2510 = 6500$ ergibt den Wert: $\underline{\underline{x = 19}}$

Nach 19 Monaten hat sie das Geld für das Auto zusammen.

Beispiel 2:
Wenn Lea 100 Minuten im Monat mit dem Handy telefoniert, zahlt sie 18 €.
Telefoniert sie 200 Minuten, so hat sie 26 € zu zahlen.
Wie hoch ist die Grundgebühr, was kostet 1 Minute telefonieren.
Ansatz: Die Grundgebühren fallen immer an. Dazu kommen Kosten für die Zeit, die telefoniert wird. Diese Kosten sind proportional zur Gesprächszeit.

1. Minute: $y = a_1 \cdot 1 + a_0$ a_1: Preis pro Minute

2. Minute: $y = a_1 \cdot 2 + a_0$ a_0: Grundgebühren

x. Minute: $y = a_1 \cdot x + a_0$

$\Rightarrow$ Funktionsgleichung: $y = f(x) = a_1 x + a_0$

Zwei Punkte, die auf dieser Geraden liegen sind bekannt:

$P_1\,(100\,|\,18)$ $P_2\,(200\,|\,26) \Rightarrow$ Lösung wie Fall II

$\Rightarrow y = f(x) = 0{,}08x + 10$

Die Grundgebühren betragen $\underline{\underline{10\text{ €}}}$, die Gesprächsminute kostet $\underline{\underline{0{,}08\text{ €}}}$