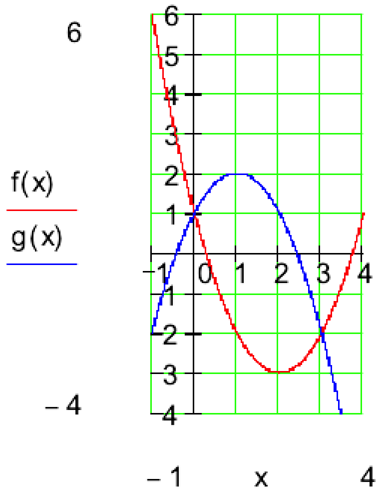
Schnittpunkte zweier Parabeln

Gegeben sind die Funktionsgleichungen zweier Parabeln, von denen die Schnittpunkte zu bestimmen sind.

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 \, bzw. \, f(x) = (x-2)^2 - 3 \Rightarrow S(2|-3)$$
$$g(x) = -x^2 + 2x + 1 \, bzw. \, g(x) = -(x-1)^2 + 2 \Rightarrow S(1|2)$$

Soll der Schnittpunkt der Graphen zweier Funktionen bestimmt werden, so setzt man die Funktionsgleichungen gleich.
Das galt schon für die Schnittpunkte von Geraden und Gerade und Parabel.
Dieses Verfahren wendet man auch bei zwei Parabeln an.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 + x^2 - 2x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \, | :2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$$
$$x(x-3) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0$$
$$x(x-3) = 0 \Rightarrow x_2 = 3$$
$$f(x_1) = f(0) = 1$$
$$f(x_2) = f(3) = -2$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{P_1(0|1); P_2(3|-2)}}$$



<u>Arbeitsauftrag</u>
Bestimmen Sie die Schnittpunkte folgender Parabeln und zeichnen Sie die Graphen.
Verwenden Sie für die Zeichnung die Scheitelpunktform der Funktionsgleichung.

a) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3 \text{ bzw. } f(x) = \frac{3}{2}(x-2)^2 - 3 \Rightarrow S(2|-3)$

$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x \text{ bzw. } g(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2 \Rightarrow S(2|-2)$

b) $f(x) = x^2 + 2 \Rightarrow S(0|2)$

$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2} \text{ bzw. } g(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 5 \Rightarrow S(3|5)$

c) $f(x) = x^2 + 2 \Rightarrow S(0|2)$

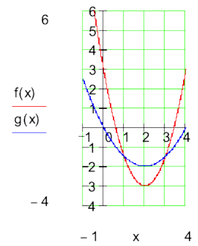
$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \text{ bzw. } g(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2 \Rightarrow S(1|2)$

d) $f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow S(0|1)$

$g(x) = x^2 + 2x - 1 \text{ bzw. } g(x) = (x+1)^2 - 2 \Rightarrow S(-1|-2)$

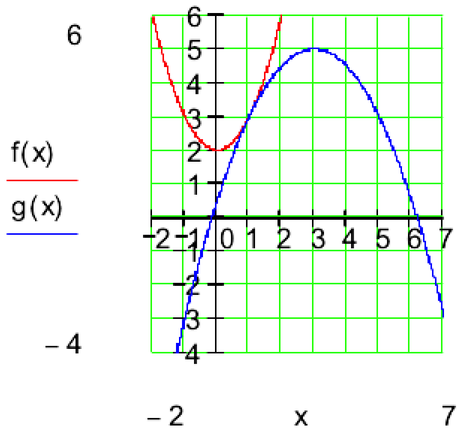
Lösung:

a)
$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow p = -4\,;\, q = 3$$
$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-2)^2 - 3 = 1$$
$$\Rightarrow x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} = 2 + \sqrt{1} = 3$$
$$x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} = 2 - \sqrt{1} = 1$$
$$g(x_1) = g(3) = -1{,}5 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(3\,|\,-1{,}5)}}$$
$$g(x_2) = g(1) = -1{,}5 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(1\,|\,-1{,}5)}}$$



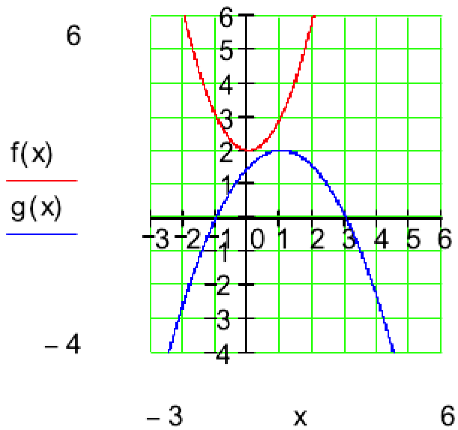
Es gibt zwei Schnittpunkte, denn D > 0.

b)
$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{3}{2} = 0 \,|\cdot \frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$\Rightarrow p = -2\,;\, q = 1$$
$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-1)^2 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} = 1$$
$$f(1) = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \underline{\underline{P(1\,|\,3)}}$$



Es gibt nur einen Berührungspunkt, denn D = 0.

c)
$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = 0 \,|\cdot \frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow p = -\frac{2}{3}\,;\, q = \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} = \frac{1}{9} - \frac{1}{3} < 0$$
$$\Rightarrow \text{keine Lösung}$$



Es gibt keinen Schnittpunkt, denn D < 0.

d) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$

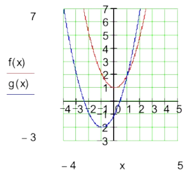
$\Leftrightarrow x^2 + 1 - x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow -2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

$\Rightarrow f(x) = f(1) = 1 + 1 = 2$

$\Rightarrow \underline{\underline{P(1|2)}}$



Führt das Gleichsetzen von f(x) und g(x) auf eine lineare Gleichung, so haben beide Parabeln nur einen Schnittpunkt.

Aus dem Übungsbeispiel erkennen wir, das die Anzahl der Schnittpunkte, die zwei Parabeln miteinander haben direkt aus der Diskriminante ablesbar ist.

$D > 0 : \quad \Rightarrow$ Die Parabeln schneiden sich in zwei Punkten

$D = 0 : \quad \Rightarrow$ Die Parabeln berühren sich in einem Punkt

$D < 0 : \quad \Rightarrow$ Die Parabeln haben keinen gemeinsamen Punkt

$f(x) - g(x) \Rightarrow$ lineare Gleichung $\Rightarrow$ Die Parabeln haben einen Schnittpunkt