## Aufstellen der Funktionsgleichung aus gegebenen Bedingungen

Drei unterschiedliche Punkte, die alle auf einer Parabel liegen sollen sind gegeben. Daraus soll die Funktionsgleichung der Parabel bestimmt werden.

$P_1(1|2);P_2(5|4);P_3(3|-1)$ Funktionsgleichung allgemein: $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$

Zur Bestimmung der Funktionsgleichung müssen für die allgemeinen Koeffizienten $a_2$, $a_1$ und $a_0$ die entsprechenden Zahlenkomponenten bestimmt werden.
Da alle drei gegebenen Punkte $P_1$ , $P_2$ und $P_3$ Punkte der zu bestimmenden Parabel sind, kann durch dreimaliges Einsetzen der Koordinaten dieser Punkte an den Stellen x und y der allgemeinen Funktionsgleichung ein Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten erzeugt werden, aus denen sich die Koeffizienten $a_1$, $a_2$ und $a_3$ bestimmen lassen.

Aufstellen des Gleichungssystems:

| $P(x\|y)$ | $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ | $=y$ |
|---|---|---|
| $P_1(1\|2)$ | $f(1)=1a_2+1a_1+1a_0$ | $=2$ |
| $P_2(5\|4)$ | $f(5)=25a_2+5a_1+1a_0$ | $=4$ |
| $P_3(3\|-1)$ | $f(3)=9a_2+3a_1+1a_0$ | $=-1$ |

Das ist ein Gleichungssystem bestehend aus drei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten.
Mit dem Additionsverfahren lässt sich die Lösung finden.

Additionsverfahren:

$$\begin{aligned}
a_2+a_1+a_0&=2\\
25a_2+5a_1+a_0&=4 \mid II-25\cdot I\\
9a_2+3a_1+a_0&=-1 \mid III-9\cdot I\\
\hline
a_2+a_1+a_0&=2\\
-20a_1-24a_0&=-46 \mid II-3\cdot III\\
-6a_1-8a_0&=-19\\
\hline
a_2+a_1+a_0&=2\\
-2a_1&=11\\
-6a_1-8a_0&=-19
\end{aligned}$$

$$-2a_1=11 \Rightarrow \underline{a_1=-\frac{11}{2}}$$

$$-6a_1-8a_0=-19 \Leftrightarrow -6\cdot\left(-\frac{11}{2}\right)-8a_0=-19$$

$$\Leftrightarrow 33-8a_0=-19 \mid -33$$

$$\Leftrightarrow -8a_0=-52 \mid :(-8) \Leftrightarrow a_0=\frac{-52}{-8}=\underline{\frac{13}{2}}$$

$$a_2+a_1+a_0=2 \Leftrightarrow a_2-\frac{11}{2}+\frac{13}{2}=2$$

$$\Leftrightarrow a_2=2-1=\underline{1}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $\underline{\underline{f(x)=x^2-\frac{11}{2}x+\frac{13}{2}}}$

Punktprobe:

$$P_1(1|2):\quad f(1)=1^2-\frac{11}{2}\cdot 1+\frac{13}{2}=1+\frac{2}{2}=1+1=2\ (w)$$

$$P_2(5|4):\quad f(5)=5^2-\frac{11}{2}\cdot 5+\frac{13}{2}=25-\frac{55}{2}+\frac{13}{2}=25-\frac{42}{2}=25-21=4\ (w)$$

$$P_3(3|-1):\quad f(3)=3^2-\frac{11}{2}\cdot 3+\frac{13}{2}=9-\frac{33}{2}+\frac{13}{2}=9-\frac{20}{2}=9-10=-1\ (w)$$

Das Additionsverfahren lässt sich schematisieren. Das führt zum Gauß – Algorithmus.
Beim Gauß – Algorithmus rechnet man nur mit den Koeffizienten.

Gauß – Algorithmus:

| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | |
| 1 | 5 | 25 | 4 | $II - I$ |
| 1 | 3 | 9 | −1 | $III - I$ |
| 1 | 1 | 1 | 2 | |
| 0 | 4 | 24 | 2 | $:2$ |
| 0 | 2 | 8 | −3 | |
| 1 | 1 | 1 | 2 | |
| 0 | 2 | 12 | 1 | |
| 0 | 2 | 8 | −3 | $III - II$ |
| 1 | 1 | 1 | 2 | |
| 0 | 2 | 12 | 1 | |
| 0 | 0 | −4 | −4 | |

Lösung durch einsetzen:

$-4a_2 = -4 \mid (-4) \Leftrightarrow \underline{a_2 = 1}$

$2a_1 + 12a_2 = 1$

$\Leftrightarrow 2a_1 + 12 \cdot 1 = 1 \mid -12$

$\Leftrightarrow 2a_1 = -11 \mid :2$

$\Leftrightarrow \underline{a_1 = -\frac{11}{2}}$

$a_0 + a_1 + a_2 = 2$

$\Leftrightarrow a_0 - \frac{11}{2} + 1 = 2$

$\Leftrightarrow a_0 - \frac{9}{2} = \frac{4}{2} \mid + \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow \underline{a_0 = \frac{13}{2}}$

Beim Gauß - Algorithmus wird zeilenweise gearbeitet.

Zeilen darf man:
- vertauschen
- mit einer Zahl multiplizieren
- durch eine Zahl dividieren
- addieren
- subtrahieren

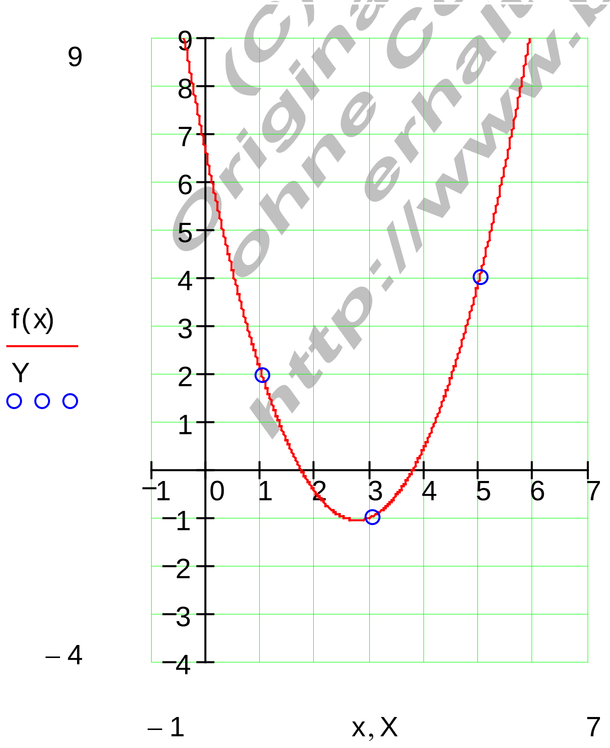
Werden die Spalten vertauscht, dann müssen auch die Koeffizienten mitgenommen werden

Das Ziel ist es auf eine Dreiecksform zu kommen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | x | x | x |
| 0 | x | x | x |
| 0 | 0 | x | x |

Funktionsgleichung: $\underline{\underline{f(x) = x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{13}{2}}}$

Der Funktionsgraph:




Um die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion zu erhalten sind drei Punkte nötig.

Wir erinnern uns:
Bei einer linearen Funktion (Gerade) waren es nur zwei Punkte.

Um den Graphen einer Parabel sauber zeichnen zu können, sind außer den vorgegebenen drei Punkten noch der Scheitelpunkt und die Achsenschnittpunkte nötig.

Wenn wir zudem auch noch die Symmetrie zur Senkrechten durch den Scheitelpunkt berücksichtigen, benötigen wir in den meisten Fällen keine weiteren Punkte.

## Sonderfälle bei Parabeln

In einigen Fällen können wir die Funktionsgleichung mit weniger Angaben bestimmen.

Beispiel:
Eine Parabel ist achsensymmetrisch zur y – Achse und geht durch die Punkte $P_1(-1|-2)$ und $P_2(2|7)$.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung f(x) und zeichnen Sie den Graphen.

Ansatz über die Scheitelpunktform:

$f(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s$

Bei Achsensymmetrie ist $x_s = 0$

und $y_s = a_0$

$\Rightarrow f(x) = a_2x^2 + a_0$

Gleichungssystem:

$P_1(-1|-2): \quad f(-1) = 1 \cdot a_2 + 1 \cdot a_0 = -2$

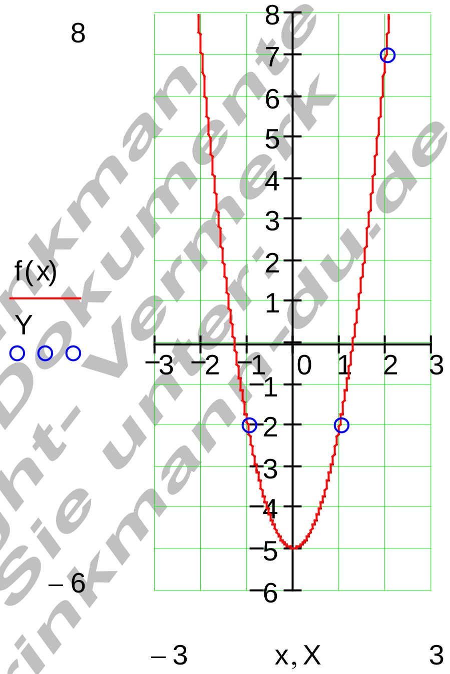
$P_2(2|7): \quad f(2) = 4 \cdot a_2 + 1 \cdot a_0 = 7$

| $a_0$ | $a_2$ | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | −2 | |
| 1 | 4 | 7 | II − I |
| 1 | 1 | −2 | |
| 0 | 3 | 9 | |

$3a_2 = 9 \Rightarrow \underline{a_2 = 3}$

$a_0 + 3 = -2 \Rightarrow \underline{a_0 = -5}$

$\underline{\underline{f(x) = 3x^2 - 5}}$




Beispiel:
Die Nullstellen einer Parabel sind: $P_{x1}(3|0)$ und $P_{x2}(-5|0)$. Ihr größter Funktionswert ist 3.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung f(x) und zeichnen Sie den Graphen.

Ansatz über Linearfaktoren: $x_1 = 3$ ; $x_2 = -5$

$f(x) = a_2(x - x_1)(x - x_2) = a_2(x - 3)(x + 5)$

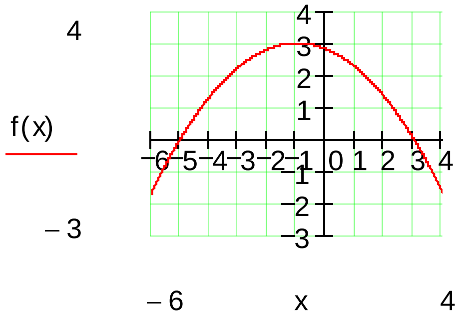
Der größte Funktionswert liegt im Scheitel $S(x_s|3)$

$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + (-5)}{2} = -1$

$f(x_s) = 3 \Leftrightarrow f(-1) = a_2(-1-3)(-1+5) = a_2(-16) = 3$

$\Rightarrow a_2 = -\frac{3}{16} \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{16}(x-3)(x+5)$

$= -\frac{3}{16}(x^2 + 2x - 15) = \underline{\underline{-\frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{45}{16}}}$




Aus der Angabe, dass der Größte Funktionswert 3 ist, kann man schließen, das die Parabel nach unten geöffnet ist. Was die Rechnung auch bestätigt.

Beispiel:
Der Graph einer ganzrationalen Funktion 2. Grades berührt die x - Achse an der Stelle $x = 4$ und geht durch den Punkt $P(-1|\,2)$.
Bestimmen Sie den Funktionsterm und zeichnen Sie den Graphen.

Berührungspunkt = Scheitelpunkt $S(4\,|\,0)$

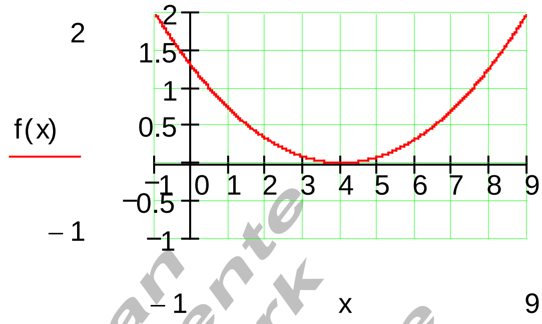
$$f(x) = a_2(x - x_s) + y_s = a_2(x-4)^2$$

$$P_1(-1|\,2):\quad f(-1) = a_2(-1-4)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow a_2(-5)^2 = 25a_2 = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{2}{25}$$

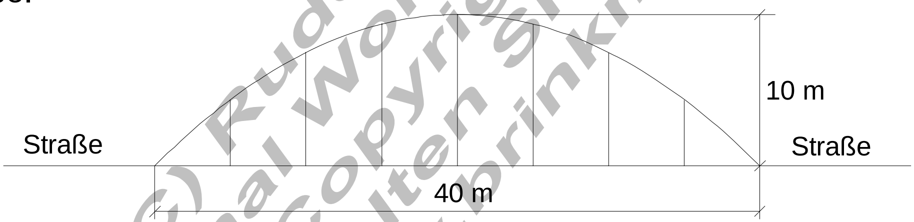
$$f(x) = \frac{2}{25}(x-4)^2 = \frac{2}{25}\left(x^2 - 8x + 16\right)$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{2}{25}x^2 - \frac{16}{25}x + \frac{32}{25}}}$$

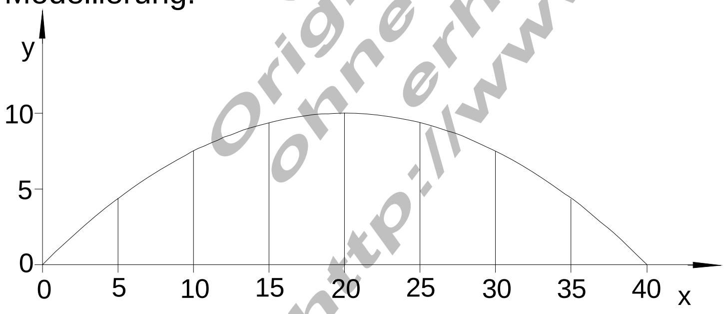



Anwendungsbeispiel:

Der Parabelförmige Bogen einer Brücke mit der Spannweite 40 m hat eine maximale Höhe von 10 m.
Berechnen Sie die Längen der 7 in gleichen Abständen vertikal angebrachten Spannstäbe.




Modellierung:




Wird das Koordinatensystem so gewählt, dann sind folgende Punkte bekannt.
Nullstellen:
$P_{x1}(0\,|\,0)\,;\,P_{x2}(40\,|\,0)$
Scheitel:
$S(20\,|\,10)$

Lösung:

$$\text{Scheitelpunktform}: f(x) = a_2\left(x-20\right)^2 + 10$$

$$P_{x1}\left(0\,|\,0\right): f(0) = a_2\left(-20\right)^2 + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 400a_2 = -10 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{10}{400} = -\frac{1}{40}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{40}\left(x-20\right)^2 + 10 = \underline{-\frac{1}{40}x^2 + x}$$

Berechnung der Stablängen durch einsetzen der x – Werte:

$$f(5) = -\frac{1}{40}\cdot 25 + 5 = -\frac{5}{8} + \frac{40}{8} = \frac{35}{8} = \underline{\underline{4{,}375}}$$

$$f(10) = -\frac{1}{40}\cdot 100 + 10 = -\frac{5}{2} + \frac{20}{2} = \frac{15}{2} = \underline{\underline{7{,}5}}$$

$$f(15) = -\frac{1}{40}\cdot 225 + 15 = -\frac{45}{8} + \frac{120}{8} = \frac{75}{8} = \underline{\underline{9{,}375}}$$

$f(20) = 10$ wegen Scheitelkoordinate

$f(25) = f(15) = \underline{\underline{9{,}375}}$ aus Symmetriegründen

$f(30) = f(10) = \underline{\underline{7{,}5}}$ aus Symmetriegründen

$f(35) = f(5) = \underline{\underline{4{,}375}}$ aus Symmetriegründen