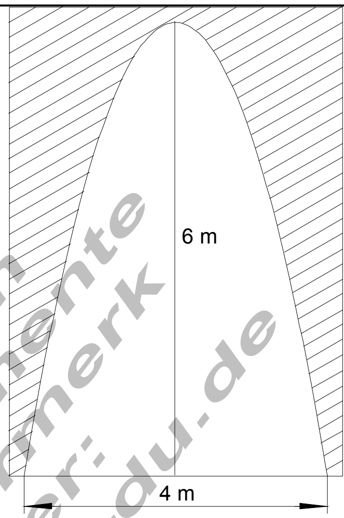
Lösungen Text- und Anwendungsaufgaben I

Ergebnisse und ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**	
	Eine Tordurchfahrt hat die Form einer Parabel. Sie ist 6 m hoch und 4 m breit. Ein Fahrzeug ist 3 m breit und 2,20 m hoch. Kann dieses Fahrzeug die Tordurchfahrt passieren? Hinweis: Berechnen Sie zuerst die Funktionsgleichung des Parabelbogens.	

A1	**Ausführliche Lösung**
	Der Koordinatenursprung wird in die linke untere Ecke des Torbogens gelegt. $S(2 \mid 6) \Rightarrow f(x) = a_2 (x-2)^2 + 6$ $f(0) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 = -6 \Rightarrow a_2 = -\frac{3}{2} = -1{,}5$ $f(x) = -\frac{3}{2}(x-2)^2 + 6 = \underline{\underline{-\frac{3}{2}x^2 + 6x}}$ Das Fahrzeug ist 3 m breit. Fährt es mittig durch die Toreinfahrt, so ist der Abstand zur linken unteren Ecke noch 0,5 m. Die Höhe des Torbogens in diesem Bereich ist: $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{8} = 2{,}625$ Das Fahrzeug ist aber nur 2,2 m hoch. Es passt durch die Toreinfahrt.

A2	**Aufgabe**	
	Ein Bogenschütze schießt einen Pfeil senkrecht in die Höhe. Die Höhe h des Pfeils in Abhängigkeit von der Zeit t wird beschrieben durch: $h(t) = -4t^2 + 15t + 2$ mit h in Metern und t in Sekunden	
	a)	Lösen Sie die Gleichung h(t) = 0 und erläutern Sie die Bedeutung der Lösungen.
	b)	Zeichnen Sie den Graphen von h(t).
	c)	Nach welcher Zeit hat der Pfeil wieder die Abschusshöhe (h = 2) erreicht?
	d)	Berechnen Sie die größte Höhe, die der Pfeil erreicht.

A2 **Ausführliche Lösung**

a)

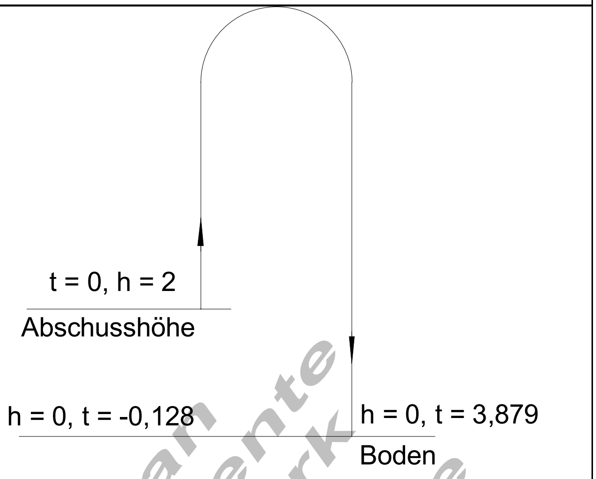
$$h(t) = -4t^2 + 15t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - \frac{15}{4}t - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow p = -\frac{15}{4}\,;\, q = -\frac{1}{2} \Rightarrow D = \frac{257}{64}$$

$$t_1 = \frac{15}{8} + \sqrt{\frac{257}{64}} \approx 3{,}879$$

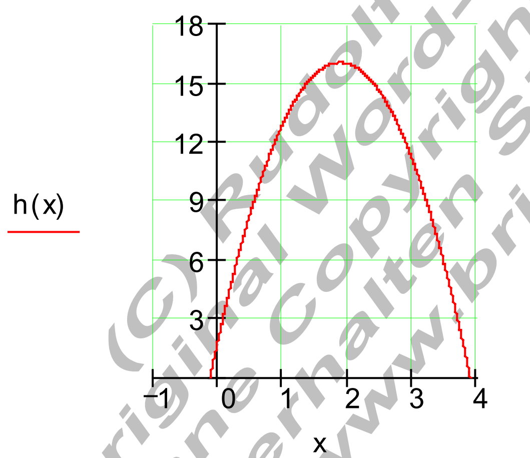
$$t_2 = \frac{15}{8} - \sqrt{\frac{257}{64}} \approx -0{,}129$$



Bedeutung der beiden Lösungen:
Zur Zeit t = 0 wird der Pfeil von einer Höhe h = 2 m abgeschossen.
Nach der Zeit t = 3,879 s kommt der Pfeil auf dem Boden h = 0 an.
Würde man den Pfeil vom Boden h = 0 aus abschießen, so benötigt er für die ersten 2 m die Zeit 0,128 s.

A2 **Ausführliche Lösung**

b)



c) Ansatz: $h(t) = 2$

$$\Leftrightarrow -4t^2 + 15t + 2 = 2$$

$$\Leftrightarrow -4t^2 + 15t = 0$$

$$\Leftrightarrow t(-4t + 15) = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = 0\,;\, t_2 = \frac{15}{4} = \underline{\underline{3{,}75}}$$

Nach t = 3,75 s befindet sich der Pfeil wieder auf der Abschusshöhe von 2 m.

A2 **Ausführliche Lösung**

d) Maximalhöhe im Scheitel

$$t_s = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{15}{8} = 1{,}875 \qquad h(t_s) = h\left(\frac{15}{8}\right) = \frac{257}{16} \approx 16{,}063$$

Die größte Höhe 16,063 m wird nach 1,875 s erreicht.

A3	**Aufgabe**	
	Eine Parabel mit der Funktionsgleichung $f(x)=0{,}1\cdot x^2$ wird abgebildet. Dadurch entsteht jeweils eine neue Parabel. Geben Sie den zugehörigen Funktionsterm an, wenn es sich um folgende Abbildungen handelt:	
	a)	Spiegelung an der x – Achse.
	b)	Spiegelung an der y – Achse.
	c)	Verschiebung um 3 Einheiten in Richtung der positiven x – Achse.
	d)	Verschiebung um 2 Einheiten in Richtung der negativen y – Achse.
	e)	Streckung mit dem Faktor 4 in y – Richtung.

E3	**Ergebnisse**	
	a)	$f(x)=0{,}1\cdot x^2$ Spiegelung an der x – Achse $\Rightarrow \underline{\underline{g(x)=-0{,}1\cdot x^2}}$
	b)	$f(x)=0{,}1\cdot x^2$ Spiegelung an der y – Achse $\Rightarrow \underline{\underline{g(x)=0{,}1\cdot x^2}}$ da achsensymmetrisch
	c)	$f(x)=0{,}1\cdot x^2$ Verschiebung 3 Eh in pos. x $\Rightarrow \underline{\underline{g(x)=0{,}1\cdot(x-3)^2}}$
	d)	$f(x)=0{,}1\cdot x^2$ Verschiebung 2 Eh in neg. y $\Rightarrow \underline{\underline{g(x)=0{,}1\cdot x^2-2}}$
	e)	$f(x)=0{,}1\cdot x^2$ Streckung um Fakt. 4 in y $\Rightarrow g(x)=4\cdot f(x)=\underline{\underline{0{,}4\cdot x^2}}$

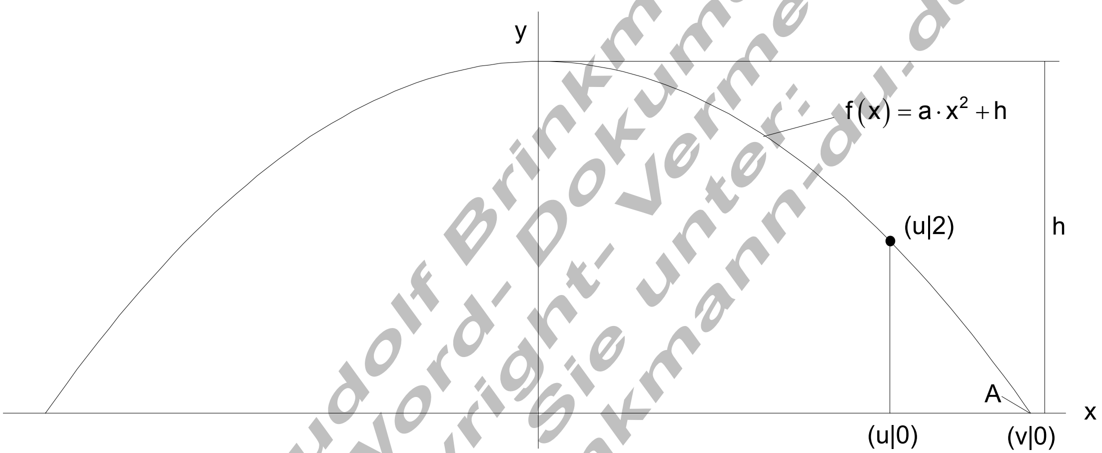
A4	**Aufgabe**
	Der Gewinn einer Unternehmung in Abhängigkeit von der hergestellten Menge ist eine ganzrationale Funktion 2. Grades. Bei 50 ME ist der Gewinn Null, für 150 ME ist der Gewinn maximal. Er beträgt dann 60000 €. Bestimmen Sie den Funktionsterm der Gewinnfunktion.

A4	**Ausführliche Lösung**
	Maximum liegt im Scheitel mit $S(150\mid 60000)$ $\Rightarrow G(x)=a_2(x-150)^2+60000$ (Scheitelpunktform) $G(50)=0 \Leftrightarrow a_2(-100)^2+60000=0 \Rightarrow a_2=-6$ $G(x)=-6(x-150)^2+60000=\underline{\underline{-6x^2+1800x-75000}}$

A5	**Aufgabe**	
	Eine parabelförmige Bogenbrücke hat eine Spannweite von 223 Metern. Ein Wanderer will die Höhe der Brücke bestimmen. Im Abstand von 1,2 Metern zum Fußpunkt der Brücke (durch Fußschrittmessung) ist der Brückenbogen 2,0 Meter hoch (durch Vergleich mit der Körpergröße).	
	a)	Welche Höhe hat der Brückenbogen maximal?
	b)	Um wie viel Prozent ändert sich die ermittelte Brückenhöhe, wenn der Wanderer bei der Fußschrittmessung 10 Zentimeter weniger gemessen hätte?

A5 Ausführliche Lösung

a) Die Länge des gesamten Brückenbogens beträgt s = 223m.
Die y- Achse teilt den Bogen in zwei Hälften, so dass der rechte Fußpunkt bei v = 111, 5m liegt.
Im ersten Fall ist der Abstand vom Fußpunkt 1,2m, er liegt also bei u = 111,5m – 1,2m = 110,3m dort hat der Brückenbogen eine Höhe von 2m.
Da der Abstand vom Fußpunkt im 2. Fall nur noch 1,1m betragen soll, ist es sinnvoll, die Rechnung zunächst mit den Variablen u und v allgemein durchzuführen. Die konkreten Werte werden zuletzt eingesetzt.



Funktionsgleichung der Parabel:

$f(x) = a \cdot x^2 + h$

$f(u) = 2 \Leftrightarrow a \cdot u^2 + h = 2 \quad (1)$

$f(v) = 0 \Leftrightarrow a \cdot v^2 + h = 0 \quad (2)$

aus (1) folgt: $a \cdot u^2 + h = 2 \Leftrightarrow h = 2 - a \cdot u^2 \quad (3)$

Wert für h in (2) einsetzen:

$a \cdot v^2 + 2 - a \cdot u^2 = 0$ auflösen nach a:

$a \cdot v^2 - a \cdot u^2 = -2 \Leftrightarrow a \cdot u^2 - a \cdot v^2 = 2$ Faktor a ausklammern:

$a \cdot \left(u^2 - v^2\right) = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{\left(u^2 - v^2\right)}$ in (3) einsetzen:

$$h = 2 - \frac{2}{\left(u^2 - v^2\right)} \cdot u^2 = \underline{\underline{\frac{2v^2}{v^2 - u^2}}}$$

Fall: $u = 110,3 \quad v = 111,5$

$$h_I = \frac{2 \cdot 111,5^2}{\left(111,5^2 - 110,3^2\right)} \approx \underline{\underline{93,419}}$$

A5	**Ausführliche Lösung**	
	b)	$\text{Fall}: u = 110{,}4 \quad v = 111{,}5$ $h_{II} = \frac{2 \cdot 111{,}5^2}{\left(111{,}5^2 - 110{,}4^2\right)} \approx \underline{\underline{101{,}886}}$ Abweichung in % bezogen auf h_I: $h_{II} - h_I = 101{,}886 - 93{,}419 = 8{,}467 \Rightarrow p = \frac{8{,}467}{93{,}419} \cdot 100 \approx \underline{\underline{9{,}06\%}}$ Der Brückenbogen hat im Fall I eine Höhe von etwa h_I = 93,419 m. Im Fall II beträgt die Höhe etwa h_{II} = 101,886m. Der prozentuale Unterschied bezogen auf h_I beträgt etwa 9,06%.