Lösungen Text- und Anwendungsaufgaben III

Ausführliche Lösungen:

A1 Aufgabe

Daten zur nebenstehenden Abbildung:

Parabel: $f(x) = -x^2 + 4$

Parallele zur y – Achse:

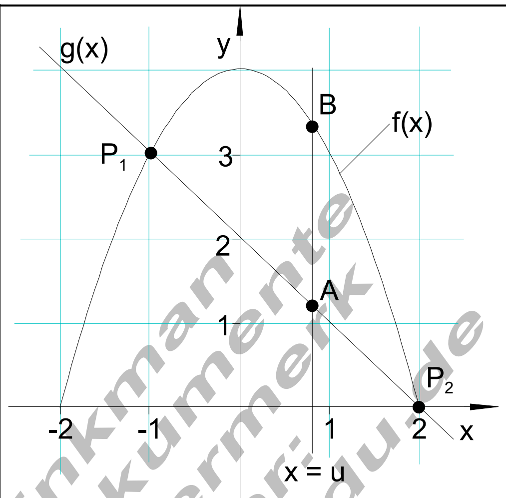
$x = u$ mit $(-1 \le u \le 2)$

Gerade g durch:

$P_1(-1 \mid 3)\,;\, P_2(2 \mid 0)$

Berechnen Sie den Abstand von A und B für u = 1.

Wie ist u zu wählen, damit der Abstand der Punkte A und B am größten wird?



A1 Ausführliche Lösung

$f(x) = -x^2 + 4\,;\quad g(x) = -x + 2$

Koordinaten der Punkte A und B: $A(u \mid g(u))\,;\, B(u \mid f(u))$

Abstand der Punkte A und B von einander:

$A(u) = f(u) - g(u) = -u^2 + 4 - (-u + 2) = -u^2 + u + 2$

Für $u = 1$ gilt: $A(1) = -1^2 + 1 + 2 = \underline{\underline{2}}$

Der größte Abstand wird bestimmt durch den Scheitelpunkt von A(u)

$$A(u) = -u^2 + u + 2 = -\left[u^2 - u - 2\right] = -\left[u^2 - u + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\right]$$

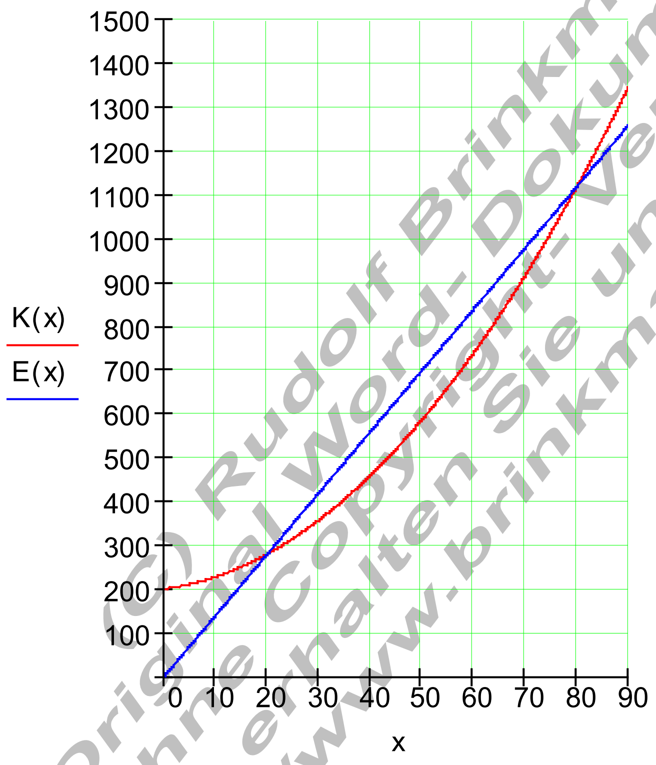
$$= -\left[\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] = -\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \Rightarrow S\left(\frac{1}{2} = 0{,}5 \;\middle|\; \frac{9}{4} = 2{,}25\right)$$

Für $\underline{\underline{u = 0{,}5}}$ ist der Abstand maximal $\underline{\underline{2{,}25\text{ LE}}}$

A2	**Aufgabe**	
	Bei der Produktion eines Artikels werden die Gesamtkosten pro Tag in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge x, festgelegt durch: $K(x)=0{,}125x^2+1{,}5x+200\,;\,0\le x\le 90$ Der Betrieb hat einen konstanten Verkaufspreis von 14€ je Stück geplant.	
	a)	Zeichnen Sie die Gesamtkostenkurve und die Erlösgerade. E(x) = 14x
	b)	Bestimmen Sie rechnerisch und graphisch, für welche Stückzahlen der Erlös und die Gesamtkosten gleich groß sind. (Nutzenschwelle und Nutzengrenze). K(x) = E(x)
	c)	Für welche Stückzahl ist der Gewinn am größten? G(x) = E(x) – K(x)

A2 Ausführliche Lösung

a) $K(x)=0{,}125x^2+1{,}5x+200\,;\,0\le x\le 90\,;\,E(x)=14x$



A2 Ausführliche Lösung

b) Nutzenschwelle aus Grafik abgelesen: $NS(20\,|\,280)$

Nutzengrenze aus Grafik abgelesen: $NS(80\,|\,1120)$

rechnerische Lösung:

$K(x)=E(x)\Leftrightarrow x^2-100x+1600=0$

$\Rightarrow x_1=80\,;\,E(80)=1120\Rightarrow NG(80\,|\,1120)$

$x_2=20\,;\,E(20)=1120\Rightarrow NS(20\,|\,280)$

A2 Ausführliche Lösung

c) Gewinn: $G(x) = E(x) - K(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{25}{2}x - 200$

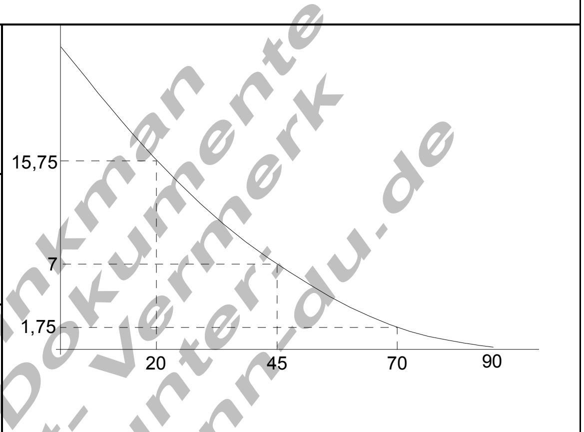
G(x) ist eine nach unten geöffnete Parabel. Gewinnmaximum ligt im Scheitel.

$$G(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{25}{2}x - 200 = -\frac{1}{8}\left[x^2 - 100x + 1600\right] = -0{,}125\left(x-50\right)^2 + 112{,}5$$

Für eine Stückzahl von $\underline{\underline{x = 50}}$ ist der Gewinn maximal (112,50 €)

A3 Aufgabe

Die Abbildung zeigt den Querschnitt einer Sprungschanze.
Die Maße in m sind der Abbildung zu entnehmen.



a) Finden Sie die Funktionsgleichung der Anlaufspur.

b) Bestimmen Sie die Differenz von höchstem und tiefstem Punkt der Anlaufspur.

A3 Ausführliche Lösung

a) $P_1(20\,|\,15{,}75):\quad f(20) = 400a_2 + 20a_1 + 1a_0 = 15{,}75$

$P_2(45\,|\,7):\quad f(45) = 2025a_2 + 45a_1 + 1a_0 = 7$

$P_3(70\,|\,1{,}75):\quad f(70) = 4900a_2 + 70a_1 + 1a_0 = 1{,}75$

a_0	a_1	a_2	
1	20	400	15,75
1	45	2025	7 II − I
1	70	4900	1,75 III − I
1	20	400	15,75
0	25	1625	−8,75
0	50	4500	−14 III − 2·I
1	20	400	15,75
0	25	1625	−8,75
0	0	1250	3,5

$1250a_2 = 3{,}5 \Rightarrow a_2 = \underline{0{,}0028}$

$25a_1 + 1625 \cdot 0{,}0028 = -8{,}75$

$\Rightarrow a_1 = \underline{-0{,}532}$

$a_0 + 20 \cdot (-0{,}532) + 400 \cdot 0{,}0028 = 15{,}75$

$\Rightarrow a_0 = \underline{25{,}27}$

$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = 0{,}0028x^2 - 0{,}532x + 25{,}27}}$

A3 Ausführliche Lösung

b) Höhenunterschied: $f(0) - f(90) = 25{,}27 - 0{,}07 = \underline{\underline{25{,}2}}$

Die Differenz vom höchstem und tiefstem Punkt der Anlaufspur beträgt 25,2 m.

A4 Aufgabe

Auf einer Teststrecke wird gemessen, wie viel Benzin ein PKW bei gleich bleibender Geschwindigkeit verbraucht. Dabei hängt der Benzinverbrauch BV (in Liter / 100 km) quadratisch von der Geschwindigkeit v (in km / h) ab.

v	30	40	80
BV	6,25	6,2	7,0

a) Bestimmen Sie den Funktionsterm für den Benzinverbrauch BV(v).

b) Mit welchem Verbrauch ist bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 120 km / h zu rechnen?

c) Bei welcher Geschwindigkeit beträgt der Verbrauch genau 8 Liter / 100 km?

d) Bei welcher Geschwindigkeit ist der Verbrauch am geringsten?

A4 Ausführliche Lösung

a) $BV(v) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad P_1(30 \mid 6{,}25)\,;P_2(40 \mid 6{,}2)\,;P_3(80 \mid 7)$

$BV(30) = 900a_2 + 30a_1 + 1a_0 = 6{,}25$

$BV(40) = 1600a_2 + 40a_1 + 1a_0 = 6{,}2$

$BV(80) = 6400a_2 + 80a_1 + 1a_0 = 7$

a_0	a_1	a_2	
1	30	900	6,25
1	40	1600	6,2 II − I
1	80	6400	7 III − I
1	30	900	6,25
0	10	700	−0,05
0	50	5500	0,75 III − 5·II
1	30	900	6,25
0	10	700	−0,05
0	0	2000	1

$2000a_2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 0{,}0005}$

$10a_1 + 700 \cdot 0{,}0005 = -0{,}05$

$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = -0{,}04}$

$a_0 + 30(-0{,}04) + 900 \cdot 0{,}0005 = 6{,}25$

$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = 7}$

$\underline{\underline{BV(v) = 0{,}0005v^2 - 0{,}04v + 7}}$

A4 Ausführliche Lösung

b) $v = 120 : \Rightarrow BV(120) = 0{,}005 \cdot 120^2 - 0{,}04 \cdot 120 + 7 = 9{,}4$

Bei einer Geschwindigkeit von 120 km/h beträgt der Verbrauch 9,4 Liter/100 km.

A4 Ausführliche Lösung

c) Ansatz: $BV(v) = 0{,}0005v^2 - 0{,}04v + 7 = 8$

$\Leftrightarrow 0{,}0005v^2 - 0{,}04v - 1 = 0 \Leftrightarrow v^2 - 80v - 2000 = 0$

$\Rightarrow v_1 = 100\,;\, v_2 = -20$

Bei einer Geschwindigkeit von v = 100 km/h ist der Verbrauch 8 Liter/100 km.

A4	**Ausführliche Lösung**	
	d)	Der geringste Verbrauch ist im Scheitelpunkt. $x-\text{Koordinate des Scheitels:}\quad x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{100-20}{2} = 40$ $BV(40) = 6{,}2$ Bei einer Geschwindigkeit von 40 km/h ist der Verbrauch 6,2 Liter/100 km. Das ist der geringst mögliche Verbrauch.