Zusammenfassung Quadratische Funktionen

Funktionsgleichung.

Die Funktionsgleichungen haben die Form:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Solche Funktionen nennt man quadratische Funktion oder auch ganzrationale Funktionen 2. Grades.
Die Graphen werden Parabeln genannt.

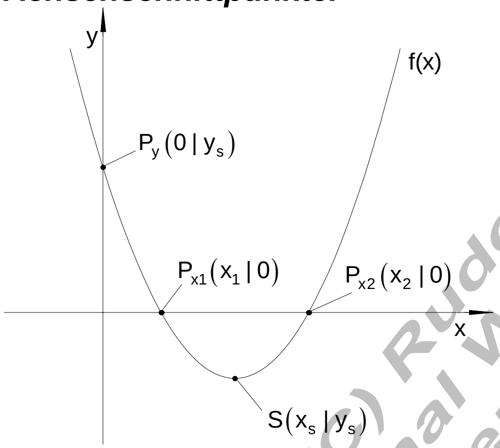
Scheitelpunkt-Scheitelpunktform.

Allgemein gilt:

Ist $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ die Funktionsgleichung einer Parabel die den Scheitelpunkt $S(x_s \mid y_s)$ besitzt, so ist

$f(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s$ die Scheitelpunktform der Funktionsgleichung.

Achsenschnittpunkte.



Der Schnittpunkt mit der y – Achse:

$P_y(0 \mid y_s) \Rightarrow y_s = f(0)$

Die Schnittpunkte mit der x – Achse:

$P_{x_i}(x_i \mid 0) \Rightarrow f(x_i) = 0$

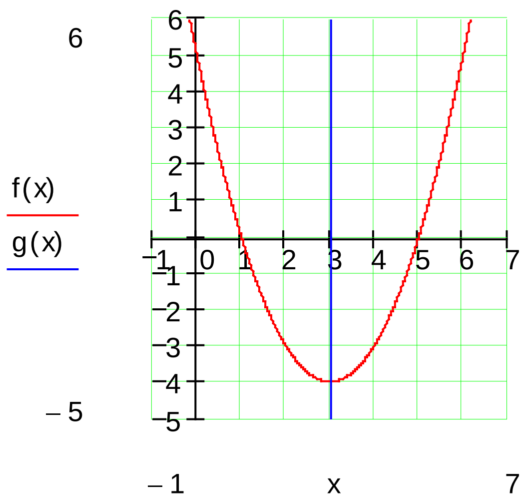
Symmetriebetrachtungen

Die abgebildete Parabel ist symmetrisch zu der Achse, die parallel zur y – Achse durch den Scheitelpunkt verläuft.
Das gilt für alle Parabeln.

Die Gleichung der Symmetrieachse durch den Scheitel $S(x_s \mid y_s)$ lautet

$x = x_s$ hier $x = 3$

Auch die Nullstellen sind symmetrisch zur Symmetrieachse.
Das bedeutet, bei bekannten Nullstellen kann der x – Wert des Scheitels berechnet werden.



Scheitelpunktberechnung über die Nullstellen:

$$\text{Nullstellen}: x_1; x_2 \text{ bekannt } \Rightarrow x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow S(x_s \mid f(x_s))$$

p-q-Formel, Diskriminante und Lösungsmenge

Normalform der quadratischen Gleichung: $f(x) = x^2 + px + q$

$p-q-\text{Formel}: \quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad$ Diskriminante: $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

Die Diskriminante D bestimmt die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung.

$x_1 = -\left(\frac{p}{2}\right) + \sqrt{D} \quad \vee \quad x_2 = -\left(\frac{p}{2}\right) - \sqrt{D}$

$D > 0 \Rightarrow L = \{x_1 ; x_2\}$ Zwei Lösungselemente

$D = 0 \Rightarrow L = \{x\}$ Ein Lösungselement (Doppellösung)

$D < 0 \Rightarrow L = \{\ \}$ Kein Lösungselement

Der Satz von Vieta

Wurzelsatz von Vieta $x_1 + x_2 = -p \quad \wedge \quad x_1 \cdot x_2 = q$

Nullstellen und Linearfaktoren

Sind x_1 und x_2 die Nullstellen der quadratischen Funktion mit der Funktionsgleichung

$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

so kann man die Funktionsgleichung auch als Produkt ihrer Linearfaktoren schreiben:

$f(x) = a_2 \underbrace{(x - x_1)}_{\text{Linearfaktor}} \underbrace{(x - x_2)}_{\text{Linearfaktor}}$

Der Satz vom Nullprodukt

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist.

$(x+a)(x+b) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -a$ und $x_2 = -b$

Beispiele: $(x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$ und $x_2 = -1$

$x(x+3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = -3$

Schnittpunkte von Parabel und Gerade.

Ansatz: gleichsetzen der Funktionsgleichungen $f(x) = g(x) \Rightarrow$ quadratische Gleichung

falls

$D > 0: \quad \Rightarrow$ Parabel und Gerade schneiden sich in zwei Punkten

$D = 0: \quad \Rightarrow$ Parabel und Gerade berühren sich in einem Punkt

$D < 0: \quad \Rightarrow$ Parabel und Gerade haben keinen gemeinsamen Punkt

Schnittpunkte zweier Parabeln

Ansatz: gleichsetzen der Funktionsgleichungen $f(x) = g(x) \Rightarrow$ quadratische Gleichung

falls

$D > 0: \quad \Rightarrow$ Die Parabeln schneiden sich in zwei Punkten

$D = 0: \quad \Rightarrow$ Die Parabeln berühren sich in einem Punkt

$D < 0: \quad \Rightarrow$ Die Parabeln haben keinen gemeinsamen Punkt

$f(x) - g(x) \Rightarrow$ lineare Gleichung $\Rightarrow$ Die Parabeln haben einen Schnittpunkt