Das Hornerschema

Um den Graphen einer ganzrationalen Funktion höherer Ordnung zeichnen zu können, muss man eine Wertetabelle anlegen.
Dabei kann es recht aufwendig sein, die dazu nötigen Funktionswerte zu berechnen.
Das ***Horner – Schema*** vereinfacht die Berechnungen sehr.

Beispiel : Ganzrationale Funktion 3. Ordnung

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Durch mehrmaliges Ausklammern von x entsteht:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x\left[a_3x^2 + a_2x + a_1\right] + a_0 = \underline{\underline{\underbrace{x\underbrace{\left[x\Big(\underbrace{a_3x + a_2}_{e_2}\Big) + a_1\right]}_{e_4} + a_0}_{E}}}$$

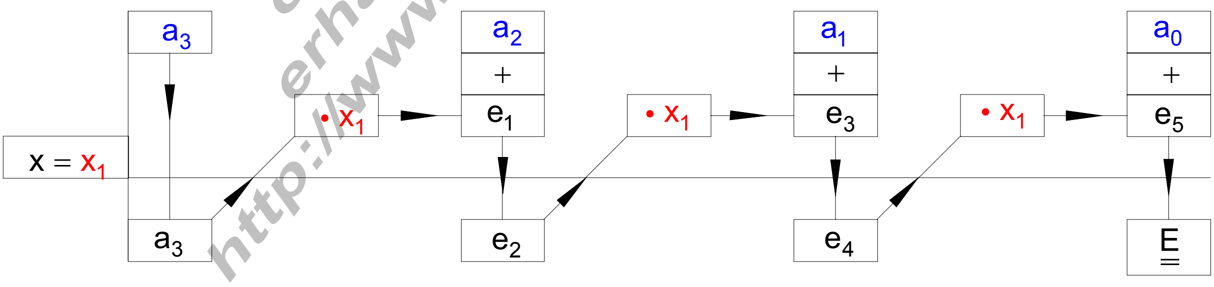
Will man den Wert der Funktion für $x = x_1$ berechnen, so kann man folgendermaßen von innen nach außen vorgehen:

- runde Klammer berechnen
- Zwischenergebnis mit x_1 multiplizieren und zu a_1 addieren
- Ergebnis mit x_1 multiplizieren und zu a_0 addieren

Diese Rechenoperationen lassen sich schematisch darstellen:

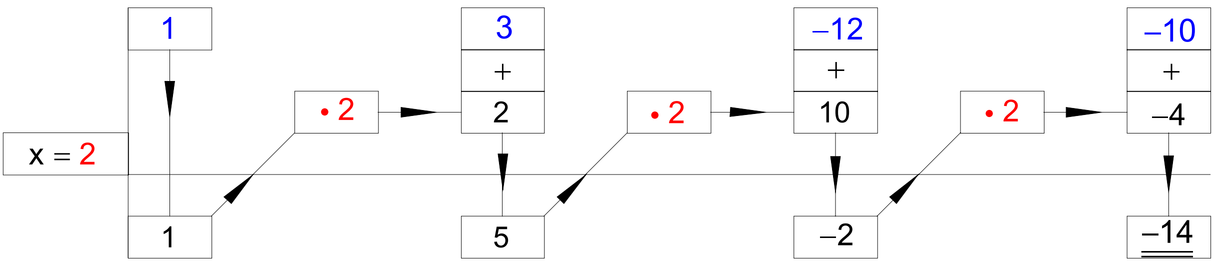
Allgemeines Schema:

$y = f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$



Beispiel: Für x = 2 soll der Wert y = f (2) mit dem Horner – Schema berechnet werden.

$y = f(x) = 1x^3 + 3x^2 - 12x - 10$



Es gilt also y = f (2) = -$\underline{\underline{14}}$

Für ein Polynom 3. Grades soll eine Wertetabelle erstellt werden um den Graphen zeichnen zu können.

$$y = f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 \quad D_f = \{x \mid -4 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

$a_3 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_1 = 1 \quad a_0 = -6$

	1	4	1	–6	
$x = -4$	$\downarrow$	–4	0	–4	
	1	0	1	–10	$= f(-4)$
	1	4	1	–6	
$x = -3$	$\downarrow$	–3	–3	+6	
	1	1	–2	0	$= f(-3)$
	1	4	1	–6	
$x = -2$	$\downarrow$	–2	–4	+6	
	1	2	–3	0	$= f(-2)$
	1	4	1	–6	
$x = -1$	$\downarrow$	–1	–3	+2	
	1	3	–2	–4	$= f(-1)$
	1	4	1	–6	
$x = 1$	$\downarrow$	+1	+5	+6	
	1	5	6	0	$= f(1)$
	1	4	1	–6	
$x = 2$	$\downarrow$	+2	+12	+26	
	1	6	13	20	$= f(2)$
	1	4	1	–6	
$x = 3$	$\downarrow$	+3	+21	+66	
	1	7	22	60	$= f(3)$
	1	4	1	–6	
$x = -2,5$	$\downarrow$	–2,5	–3,75	+6,875	
	1	1,5	–2,75	0,875	$= f(-2,5)$

Wertetabelle:

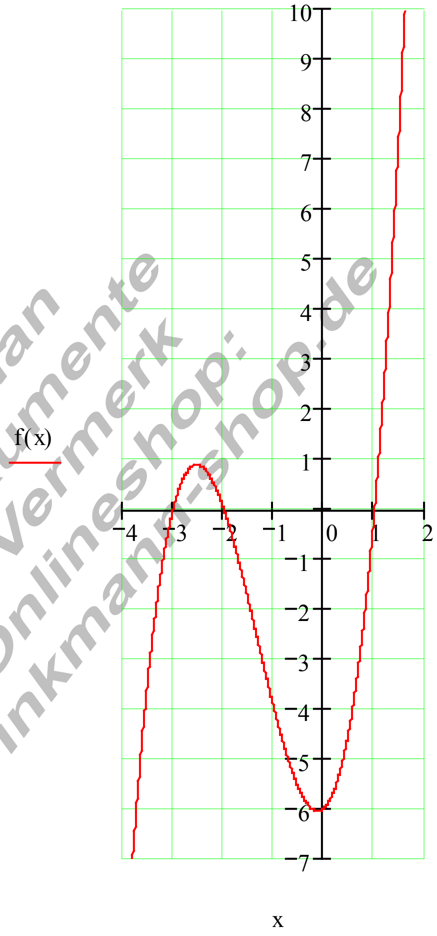
x	–4	–3	–2,5	–2	–1
f(x)	–10	0	0,875	0	–4
x	0	1	2	3	
f(x)	–6	0	20	60	

Mit den Tabellenwerten kann der Graph näherungsweise gezeichnet werden.

Sollte sich beim zeichnen herausstellen, das noch ein Wert fehlt, so kann man sich diesen jederzeit beschaffen.

Der Graph hat bei folgenden x – Werten Nullstellen:
– 3 – 2 und bei 1

Er schneidet die y – Achse bei – 6



Sollte sich beim zeichnen herausstellen, das noch ein Wert fehlt, so kann man sich diesen jederzeit über das Hornerschema beschaffen. z.B. f (0,5)

	1	4	1	–6	
$x = 0,5$	↓	$+0,5$	$+2,25$	$+1,624$	
	1	4,5	3,25	–4,375	$= f(0,5)$

Horner-Schema ersetzt Polynomdivision

Das Horner-Schema ersetzt die Polynomdivision beim lösen von Polynomgleichungen.
Um weitere Lösungen eines Polynoms zu berechnen, von dem eine Lösung bereits bekannt ist, wird üblicherweise die Polynomdivision verwendet, um das Restpolynom zu erhalten woraus man weitere Lösungen ermitteln kann.
Das soll nun an einem Beispiel erläutert werden.
$x^3 + x^2 - 8x - 8 = 0$ sei ein Polynom 3. Grades, von dem die Lösung $x_1 = -1$ bekannt ist.
Folgende Polynomdivision liefert eine quadratische Gleichung als Restpolynom:

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3+x^2-8x-8\right):(x+1)=x^2-8 \\
\underline{-\left(x^3+x^2\right)\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad -8x-8 \\
\qquad\qquad \underline{-(8x-8)}
\end{array}
$$

Restpolynom: $x^2 - 8 = 0$
Die quadratischen Gleichung $x^2 - 8 = 0$ liefert, sofern sie lösbar ist, weitere Lösungen der Polynomgleichung.

Mit dem Horner-Schema lässt sich auf einfache Weise zeigen, das $x_1 = -1$ Lösung der Polynomgleichung ist.

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & 1 & 1 & -8 & -8 \\
x=-1 & \downarrow & \underline{-1} & \underline{0} & \underline{8} \\
 & 1 & 0 & -8 & 0 \\
\end{array}
$$

$$1x^2 + 0x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8 = 0$$

Die Zahlen in der dritten Zeile liefern die Koeffizienten des Restpolynoms, wie es auch durch die Polynomdivision erhalten wurde.

Das Horner-Schema liefert also im Schnellverfahren als Abfallprodukt eine Polynomdivision.
Ebenfalls lassen sich mit dem Horner-Schema oft auch Lösungen der Polynomgleichung bestimmen.
Dazu setzt man in das Schema vorzugsweise Teiler des Absolutgliedes der Polynomgleichung ein.

Beispiel:

$x^3 - 3x^2 - 6x - 2 = 0$ Absolutglied: -2

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & 1 & -3 & -6 & -2 \\
x=-1 & \downarrow & \underline{-1} & \underline{4} & \underline{2} \\
 & 1 & -4 & -2 & 0 \\
\end{array}
$$

$$1x^2 - 4x - 2 = 0$$

Das Restpolynom lässt sich mit der p-q-Formel lösen.

Fazit:
Hat eine Polynomgleichung eine ganzzahlige Lösung, so lässt diese sich leicht mittels Horner-Schema finden.
Das Restpolynom wird dabei gleich mitgeliefert.