

## Polynomdivision

Zwischen der Polynomdivision und dem schriftlichen dividieren besteht ein Zusammenhang. Folgende Gegenüberstellung soll das im Falle einer Division ohne Rest zeigen.

$  \begin{array}{r}  62228 : 47 = 1324 \\  \underline{-47} \phantom{0000} \\  152 \\  \underline{-141} \phantom{000} \\  112 \\  \underline{-94} \phantom{00} \\  188 \\  \underline{-188} \\  0  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  (x^3 - 6x^2 + 11x - 12) : (x - 4) = x^2 - 2x + 3 \\  \underline{-(x^3 - 4x^2)} \phantom{00} \\  -2x^2 + 11x \phantom{00} \\  \underline{-(-2x^2 + 8x)} \phantom{00} \\  3x - 12 \\  \underline{-(3x - 12)} \\  0  \end{array}  $
<p>Die Zahl 62, bestehend aus den ersten zwei Ziffern der zu teilenden Zahl wird durch den Teiler (47) dividiert.</p> <p>Das Ergebnis (1) wird mit dem Teiler 47 multipliziert und von der Zahl (62) subtrahiert.</p> <p>Mit dem Ergebnis der Subtraktion (152) verfährt man in gleicher Weise. Man führt dieses Verfahren so lange durch, bis das Subtraktionsergebnis Null ist.</p> <p>Probe: <math>47 \cdot 1324 = 62228</math></p>	<p>Der erste Summand des zu teilenden Polynoms (<math>x^3</math>) wird durch den ersten Summanden des Teilers (<math>x</math>) dividiert.</p> <p>Das Ergebnis (<math>x^2</math>) wird mit dem Teiler (<math>x - 4</math>) multipliziert und von dem zu teilenden Polynom subtrahiert.</p> <p>Mit dem Ergebnis der Subtraktion (<math>-2x^2 + 11x - 12</math>) verfährt man in gleicher Weise. Man führt dieses Verfahren so lange durch, bis das Subtraktionsergebnis Null ist.</p> <p>Probe: <math>(x - 4) \cdot (x^2 - 2x + 3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 12</math></p>

### Beispiele:

$  \begin{array}{r}  (-6x^3 + 5x^2 + 14x - 12) : (-2x + 3) = 3x^2 + 2x - 4 \\  \underline{-(-6x^3 + 9x^2)} \\  -4x^2 + 14x \\  \underline{-(-4x^2 + 6x)} \\  8x - 12 \\  \underline{-(8x - 12)} \\  0  \end{array}  $ <p>Probe :</p> $(-6x^3 + 5x^2 + 14x - 12) = (3x^2 + 2x - 4)(-2x + 3)$	$  \begin{array}{r}  (a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2 \\  \underline{-(a^3 - a^2b)} \\  a^2b - b^3 \\  \underline{-(a^2b - ab^2)} \\  ab^2 - b^3 \\  \underline{-(ab^2 - b^3)} \\  0  \end{array}  $ <p>Probe :</p> $(a^3 - b^3) = (a^2 + ab + b^2)(a - b)$
---	---

$$(x^3 + 3x^2 - 6x - 8) : (x - 2) = x^2 + 5x + 4$$

$$-(x^3 - 2x^2)$$

$$5x^2 - 6x$$

$$-(5x^2 - 10x)$$

$$4x - 8$$

$$-(4x - 8)$$

$$0$$

$$\text{Probe: } (x^2 + 5x + 4)(x - 2) = (x^3 + 3x^2 - 6x - 8)$$

$$(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) : (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$-(a^3 + a^2b)$$

$$2a^2b + 3ab^2$$

$$-(2a^2b + 2ab^2)$$

$$ab^2 + b^3$$

$$-(ab^2 + b^3)$$

$$0$$

$$\text{Probe: } (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = \underbrace{(a^2 + 2ab + b^2)}_{\text{1. binomische Formel}}(a + b) = \underbrace{(a + b)(a + b)(a + b)}_{\text{Linearfaktoren}}$$

$$\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2\right) : (x - 2) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$$

$$-\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2\right)$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$$

$$-\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x\right)$$

$$-x + 2$$

$$-(-x + 2)$$

$$0$$

$$\text{Probe: } \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2\right) = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1\right)(x - 2)$$

$\begin{array}{r} (2x^3 - 14x - 12) : (x - 3) = 2x^2 + 6x + 4 \\ -(2x^3 - 6x^2) \\ \hline 6x^2 - 14x \\ -(6x^2 - 18x) \\ \hline 4x - 12 \\ -(4x - 12) \\ \hline 0 \end{array}$	<p>Wie das nebenstehende Beispiel zeigt, ist es in manchen Fällen sinnvoll, bei der Schreibweise der Terme eine Lücke zu lassen.</p> <p>Eine andere Möglichkeit ist, die Lücke mit Null zu füllen.</p> $2x^3 - 14x - 12 = 2x^3 + 0x^2 - 14x - 12$
--	---

Das folgende Beispiel behandelt die Division mit Rest. Ebenfalls bekannt bei der schriftlichen Division von Zahlen.

$\begin{array}{r} (x^3 + 3x^2 - 6x - 8) : (x - 1) = x^2 + 4x - 2 \text{ (Rest } -10) \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline 4x^2 - 6x \\ -(4x^2 - 4x) \\ \hline -2x - 8 \\ -(-2x + 2) \\ \hline -10 \text{ Rest} \end{array}$	$\Rightarrow (x^3 + 3x^2 - 6x - 8) : (x - 1) = x^2 + 4x - 2 - \frac{10}{(x - 1)}$
<p>Probe: <math>\left(x^2 + 4x - 2 - \frac{10}{(x - 1)}\right)(x - 1) = (x^3 + 3x^2 - 6x - 8)</math></p>	

Da gerade Anfänger bei der Durchführung der Polynomdivision immer wieder Fehler machen, ist es wichtig das erhaltene Ergebnis durch eine Proberechnung zu kontrollieren.

Ein Anwendungsbeispiel der Polynomdivision.

Ist von einem Polynom eine Nullstelle bekannt, so kann der Grad des Polynoms um eins reduziert werden.

<p><math>x_1 = 2</math> ist eine bekannte Nullstelle, es erfolgt die Polynomdivision</p>	
$\begin{array}{r} (x^3 - x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = \underbrace{x^2 + x - 3}_{\text{Restpolynom}} \\ -(x^3 - 2x^2) \\ \hline x^2 - 5x \\ -(x^2 - 2x) \\ \hline -3x + 6 \\ -(-3x + 6) \\ \hline 0 \end{array}$	<p>Die Nullstellen des Restpolynoms lassen sich durch die Lösung der quadratischen Gleichung <math>x^2 + x - 3 = 0</math> berechnen</p>

Wenn es darum geht Lösungen eines Polynoms zu finden, kann man dazu statt der Polynomdivision auch das Horner- Schema verwenden.

Hiermit lässt sich auf einfache Weise zeigen, dass für das Polynom  $x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$   $x_1 = 2$  eine Lösung darstellt.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 x = 2 & 1 & -1 & -5 & 6 \\
 & \downarrow & \underline{2} & \underline{2} & \underline{-6} \\
 & 1 & 1 & -3 & 0 \\
 & 1x^2 & + 1x & - 3 & = 0
 \end{array}$$

Die Zahlen in der dritten Zeile liefern die Koeffizienten des Restpolynoms, wie es auch durch die Polynomdivision erhalten wurde.

Das Horner-Schema liefert also im Schnellverfahren als Abfallprodukt eine Polynomdivision.

Ebenfalls lassen sich mit dem Horner-Schema oft auch Lösungen der Polynomgleichung bestimmen.

Dazu setzt man in das Schema vorzugsweise Teiler des Absolutgliedes der Polynomgleichung ein.

Beispiel:

$$x^3 - 3x^2 - 6x - 2 = 0 \quad \text{Absolutglied: } -2$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 x = -1 & 1 & -3 & -6 & -2 \\
 & \downarrow & \underline{-1} & \underline{4} & \underline{2} \\
 & 1 & -4 & -2 & 0 \\
 & 1x^2 & - 4x & - 2 & = 0
 \end{array}$$

Das Restpolynom lässt sich mit der p-q-Formel lösen.

Fazit:

Hat eine Polynomgleichung eine ganzzahlige Lösung, so lässt diese sich leicht mittels Horner-Schema finden.

Das Restpolynom wird dabei gleich mitgeliefert.