Lösungen ganzrationale Funktionen aus gegebenen Bedingungen IV

Ausführliche Lösungen:

A1 Aufgabe

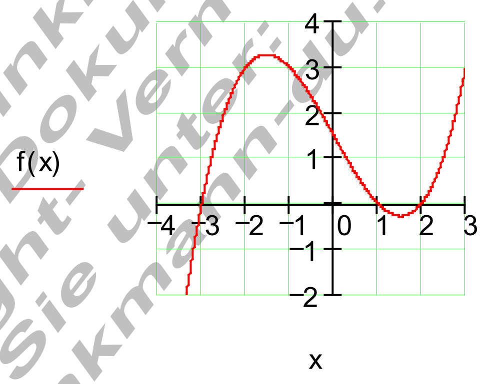
Von einer ganzrationalen Funktion 3. Grades sind die drei Nullstellen und ein weiterer Punkt bekannt. Skizzieren Sie den Graphen und bestimmen Sie den Funktionsterm.

$P_{x_1}(-3\,|\,0)\,;P_{x_2}(1\,|\,0)\,;P_{x_3}(2\,|\,0)\,;P(0\,|\,1{,}5)$

A1 Ausführliche Lösung

Vorüberlegung:
Eine ganzrationale Funktion 3. Grades kann maximal 3 Nullstellen haben.
Zwischen der Nullstelle P_{x1} und dem Punkt P muss ein Hochpunkt liegen.
Zwischen den Nullstellen P_{x2} und P_{x3} muss ein Tiefpunkt liegen.

$$f(x) = a_3(x+3)(x-1)(x-2)$$
$$f(0) = 1{,}5$$
$$\Leftrightarrow a_3 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot (-2) = 1{,}5$$
$$\Leftrightarrow a_3 = \frac{1{,}5}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}(x+3)(x-1)(x-2)$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x + \frac{3}{2}$$



A2 Aufgabe

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades ist symmetrisch zum Ursprung und verläuft durch die Punkte $P_1(3 \,|\, 0)$ und $P_2(5 \,|\, 5)$.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung und die Achsenschnittpunkte. Stellen Sie eine Wertetabelle auf und zeichnen Sie den Graphen.

A2 Ausführliche Lösung

Die Funktionsgleichung:
Wegen der Punktsymmetrie kann folgender Ansatz gemacht werden:

$f(x) = a_3x^3 + a_1x$ $\quad P_1(3\,|\,0): f(3) = 27a_3 + 3a_1 = 0$

$P_2(5\,|\,5): f(3) = 125a_3 + 5a_1 = 5$

a_1	a_3	
3	27	0 | :3
5	125	5 | 5
1	9	0
1	25	1 II − I
1	9	0
0	16	1

$$16a_3 = 1 \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{16}$$
$$a_1 + 9a_3 = 0 \Leftrightarrow a_1 + \frac{9}{16} = 0 \Leftrightarrow a_1 = -\frac{9}{16}$$

Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{9}{16}x$$

A2 Ausführliche Lösung

Die Achsenschnittpunkte:

$P_y(0|0) = P_{x1}(0|0)$ 1. Nullstelle

$P_2(3|0) = P_{x2}(3|0)$ 2. Nullstelle

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16}x\left(x^2 - 9\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow |x| = 3$$

$\Rightarrow x_2 = 3\,;\, x_3 = -3 \Rightarrow P_{x3}(-3|0)$ 3. Nullstelle

A2 Ausführliche Lösung

Die Werte für die Wertetabelle werden von Hand berechnet:

$$f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{9}{16}x$$

$$f(1) = \frac{1}{16} - \frac{9}{16} = -\frac{8}{16} = -0,5$$

$$f(2) = \frac{8}{16} - \frac{18}{16} = -\frac{10}{16} = -0,625$$

$$f(4) = \frac{64}{16} - \frac{36}{16} = -\frac{28}{16} = 1,75$$

Wegen der Punktsymmetrie gilt:

$f(-x) = -f(x)$

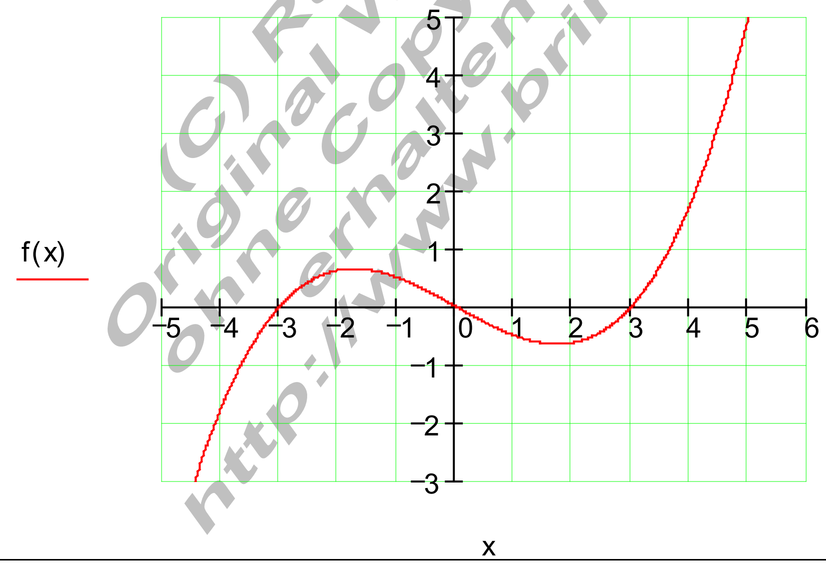
$f(-1) = -f(1) = 0,5$

$f(-2) = -f(2) = 0,625$

$f(-4) = -f(4) = -1,75$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	−1,75	0	0,65	0,5	0	−0,5	−0,625	0	1,75	5

A2 Ausführliche Lösung



A3 **Aufgabe**

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades f(x) hat die Nullstellen P_{x1}, P_{x2} und P_{x3}. Der Graph der Funktion f(x) verläuft durch den Punkt P. Bestimmen Sie f(x). Wie hängt der Graph von f(x) mit dem von g(x) zusammen?

Daten:

$$P_{x_1}(-10\,|\,0);P_{x_2}(-1\,|\,0);P_{x_3}(1\,|\,0);P(2\,|\,6);g(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{3}x^2-\frac{1}{6}x\,,\,x\in\mathbb{R}$$

A3 **Ausführliche Lösung**

Ansatz über Linearfaktoren:

$$f(x)=a_3(x+10)(x+1)(x-1)$$

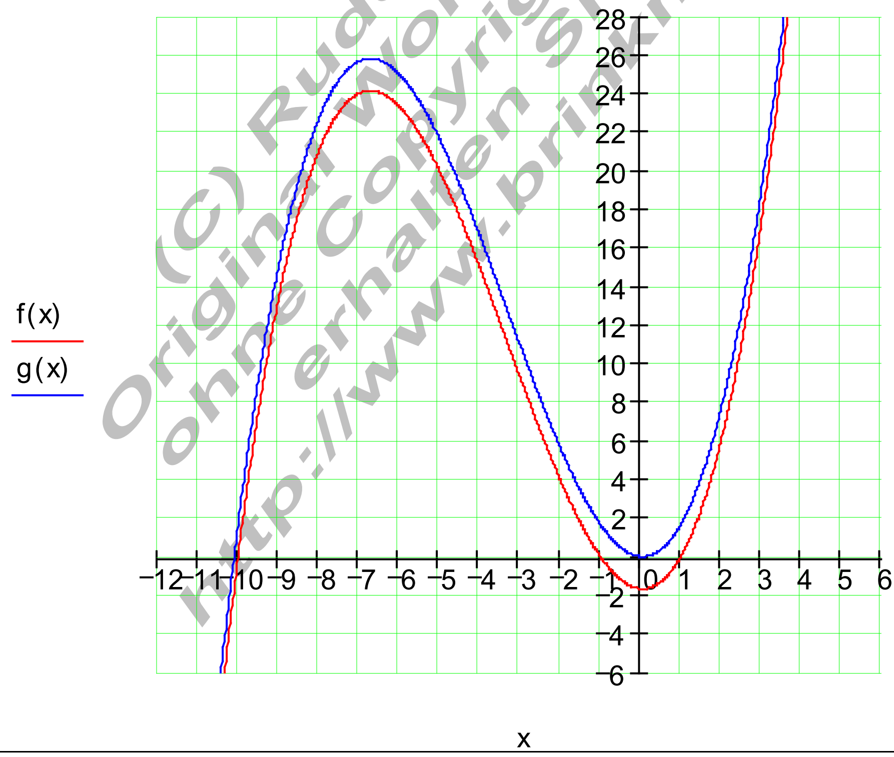
$$P(2\,|\,6):f(2)=a_3\cdot 12\cdot 3\cdot 1=6\Leftrightarrow a_3=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

Funktionsgleichung:

$$f(x)=\frac{1}{6}(x+10)(x+1)(x-1)=\underline{\underline{\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{3}x^2-\frac{1}{6}x-\frac{5}{3}}}$$

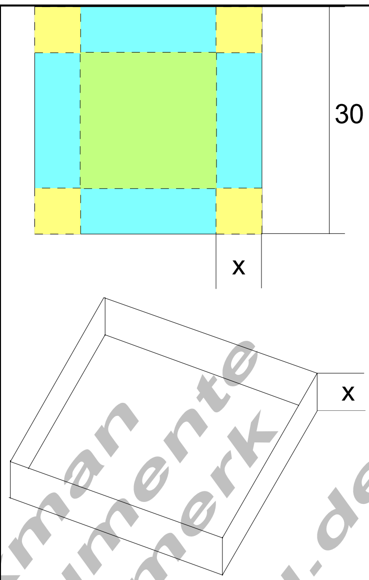
f(x) ist eine Verschiebung von g(x) um $\frac{5}{3}$ LE nach unten, also $f(x)=g(x)-\frac{5}{3}$

A3 **Ausführliche Lösung**



A4 Aufgabe

Aus einem quadratischen Karton der Seitenlänge 30 cm wird durch falten eine Schachtel ohne Deckel mit der Höhe x geformt.



a) Zeigen Sie, dass man nur für

$$0 < x < 15$$

eine solche Schachtel formen kann.

b) Bestimmen Sie einen Funktionsterm, der das Volumen V in Abhängigkeit von x beschreibt.

c) Zeichnen Sie den Graphen und bestimmen Sie näherungsweise das maximale Volumen.

A4 Ausführliche Lösung

a) x muss positiv sein $\Rightarrow x > 0$

2x muss kleiner als die Seitenlänge sein $\Rightarrow 2x < 30 \Leftrightarrow x < 15$

$\Rightarrow 0 < x < 15$

A4 Ausführliche Lösung

b) $V = a \cdot b \cdot h$ mit $h = x$ und $a = 30 - 2x$ und $b = 30 - 2x$ gilt:

$V(x) = (30 - 2x)(30 - 2x)x = \underline{\underline{4x^3 - 120x^2 + 900x}}$

Wertetabelle:

x	0	2	4	6	8	10	12	14	15
V(x)	0	1353	1936	1944	1568	1000	432	56	0

A4 Ausführliche Lösung

c)

Das maximale Volumen der Schachtel liegt bei etwa 2000 cm^3 und gilt für einen x – Abschnitt von etwa 5 cm.
Eine exakte Berechnung ist erst mit Hilfe der Differentialrechnung möglich.

A5 Aufgabe

Die als Windkraft installierte elektrische Leistung in Deutschland lässt sich nebenstehender Tabelle entnehmen.

Jahr	2002	2003	2004	2005
Leistung	12	14,825	17,2	19,275

Leistungsangabe in Gigawatt (GW).

a) Ermitteln Sie eine Funktion, die die Entwicklung beschreibt.

b) Erstellen Sie eine Prognose für die Jahre 2006 und 2010.

c) Vergleichen Sie die Funktionswerte mit einer installierten Leistung von 20,9 GW in 2006 und dem Ziel von 30 GW in 2010.

A5 Ausführliche Lösung

a) Ansatz: Ganzrationale Funktion 3. Grades durch 4 Punkte.
Der Beginn der Zählung 2002 wird als Nullpunkt definiert.

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1(0\,|\,12) \Rightarrow f(0) = 12 \Rightarrow a_0 = 12$

$P_2(1\,|\,14{,}825) \Rightarrow f(1) = 14{,}825 \Rightarrow 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 12 = 14{,}825$

$P_3(2\,|\,17{,}2) \Rightarrow f(2) = 17{,}2 \Rightarrow 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 12 = 17{,}2$

$P_4(3\,|\,19{,}275) \Rightarrow f(3) = 19{,}275 \Rightarrow 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 12 = 19{,}275$

Umformung der Gleichungen:

$1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 12 = 14{,}825\,|\,-12 \Leftrightarrow 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 = 2{,}825$

$8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 12 = 17{,}2\,|\,-12 \Leftrightarrow 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = 5{,}2$

$27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 12 = 19{,}275\,|\,-12 \Leftrightarrow 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 = 7{,}275$

a_1	a_2	a_3		
1	1	1	2,825	
2	4	8	5,2	II − 2·I
3	9	27	7,275	III − 3·I
1	1	1	2,825	
0	2	6	−045	
0	6	24	−1,2	III − 3·II
1	1	1	2,825	
0	2	6	−0,45	
0	0	6	0,15	

$6a_3 = 0{,}15 \Leftrightarrow a_3 = 0{,}025$

$2a_2 + 6a_3 = -045 \Leftrightarrow a_2 = -0{,}3$

$a_1 + a_2 + a_3 = 2{,}825 \Leftrightarrow a_1 = 3{,}1$

$$\underline{\underline{f(x) = 0{,}025x^3 - 0{,}3x^2 + 3{,}1x + 12}}$$

A5 Ausführliche Lösung

b) Prognosen in GW:

2006: $f(4) = 0{,}025 \cdot 64 - 0{,}3 \cdot 16 + 3{,}1 \cdot 4 + 12 = 21{,}2$

2010: $f(8) = 0{,}025 \cdot 512 - 0{,}3 \cdot 64 + 3{,}1 \cdot 8 + 12 = 30{,}4$

A5 Ausführliche Lösung

c) Für 2006 übersteigt die Prognose mit 21,2 GW die tatsächlich installierte Leistung von 20,9 GW geringfügig.
Für 2010 übersteigt die Prognose mit 30,4 GW die bis dahin möglicherweise installierte Leistung von 30 GW ebenfalls nur geringfügig.