Graphen ganzrationaler Funktionen zeichnen

Um den Graphen einer ganzrationalen Funktion zeichnen zu können, benötigt man eine Wertetabelle und die Achsenschnittpunkte.

Wertetabelle:
Eine Möglichkeit die Wertetabelle zu erhalten besteht darin, alle benötigten Funktionswerte mit dem Taschenrechner auszurechnen.
Ein anderes, oftmals einfacheres Verfahren liefert das HORNER – Schema.

Horner - Schema zur Bestimmung der Funktionswerte der Funktion $f(x) = x^3 - x^2 - 11x + 3$ für $D = \{x \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

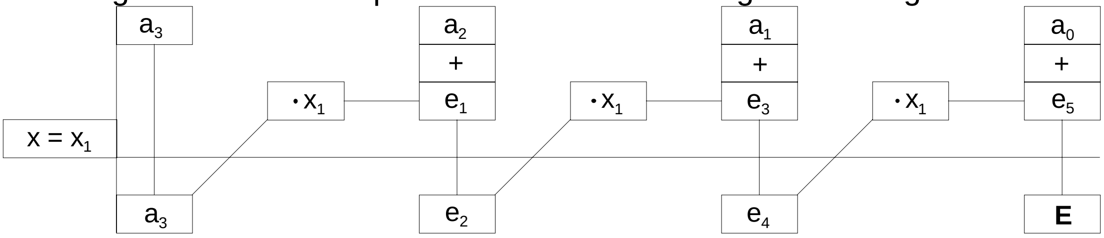
	1	−1	−11	3		
$x = -4$	$\downarrow$	−4	+20	−36		
	1	−5	9	−33		$\Rightarrow f(-4) = -33$
	1	−1	−11	3		
$x = -3$	$\downarrow$	−3	+12	−3		
	1	−4	1	0		$\Rightarrow f(-3) = 0$ Nullstelle
	1	−1	−11	3		
$x = -2$	$\downarrow$	−2	+6	+10		
	1	−3	−5	13		$\Rightarrow f(-2) = 13$
	1	−1	−11	3		
$x = -1$	$\downarrow$	−1	+2	+9		Hochpunkt
	1	−2	−9	12		$\Rightarrow f(-1) = 12$
	1	−1	−11	3		Nulldurchgang
$x = 1$	$\downarrow$	+1	0	−11		
	1	0	−11	−8		$\Rightarrow f(1) = -8$
	1	−1	−11	3		
$x = 2$	$\downarrow$	+2	+2	−18		
	1	1	−9	−15		$\Rightarrow f(2) = -15$
	1	−1	−11	3		Tiefpunkt
$x = 3$	$\downarrow$	+3	+6	−15		
	1	2	−5	−12		$f(3) = -12$
	1	−1	−11	3		Nulldurchgang
$x = 4$	$\downarrow$	+4	+12	+4		
	1	3	1	7		$f(4) = 7$

Schnittpunkt mit der y - Achse:
$f(0) = 3$
Funktionsverlauf von II - I
Aus dem Schema erkennen wir:
Nullstelle bei $x = -3$; $f(-3) = 0$
Hochpunkt zwischen $[-2; -1]$
Nulldurchgang zwischen $[0; 1]$
Tiefpunkt zwischen $[2; 3]$
Nulldurchgang zwischen $[3; 4]$

Wertetabelle:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
f(x)	−33	0	13	12	3	−8	−15	−12	7

Nachfolgend ist das Prinzip des Horner – Schemas grafisch dargestellt.



Berechnung der Nullstellen:

$f(x) = x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$ mit $x_1 = -3$ als bekannte Nullstelle

$\Rightarrow$ Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\left(x^3 - x^2 - 11x + 3\right) : (x+3) = x^2 - 4x + 1 \\
\underline{-\left(x^3 + 3x\right)} \\
\quad -4x^2 - 11x \\
\quad \underline{-\left(-4x^2 - 12x\right)} \\
\qquad\quad x + 3 \\
\qquad\quad \underline{-(x+3)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \quad p = -4 \quad q = 1$$

$$D = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$x_{2/3} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$x_2 = 2 + \sqrt{3} \approx 3{,}73$$

$$x_3 = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}27$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{x_1}(-3 \mid 0) ; P_{x_2}\left(2+\sqrt{3} \mid 0\right) ; P_{x_3}\left(2-\sqrt{3} \mid 0\right)}}$$

Ist eine Nullstelle bekannt, dann kann der Grad des Polynoms auch über das HORNER – Schema verringert werden.

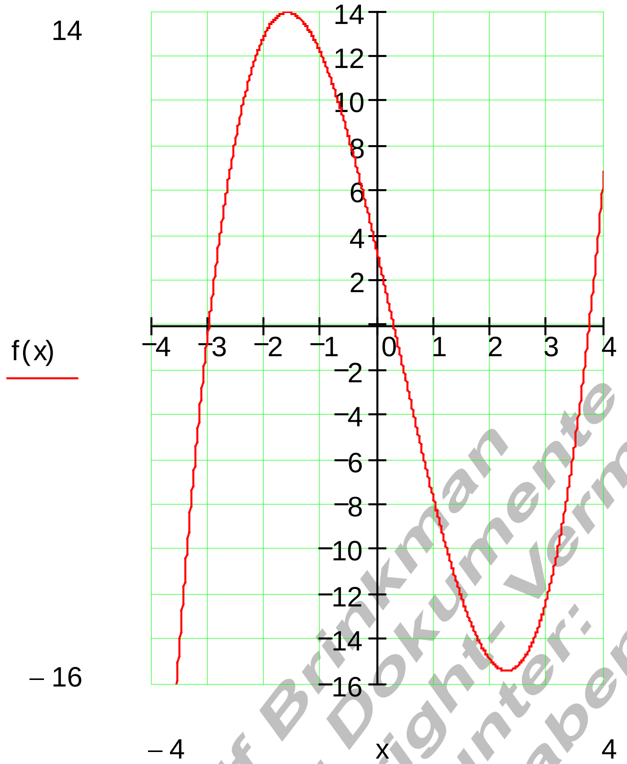
$f(x) = x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$ mit $x_1 = -3$ als bekannte Nullstelle

$$\begin{array}{lrrrr}
 & 1 & -1 & -11 & 3 \\
x_1 = -3 \quad \downarrow & & \underline{-3} & \underline{+12} & \underline{-3} \\
 & 1 & -4 & 1 & 0
\end{array} \quad \Rightarrow 1x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = 2 + \sqrt{3} \approx 3{,}73 \qquad x_3 = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}27$$

Die quadratische Gleichung ist die gleiche und hat somit auch die gleiche Lösung.

Mit allen nun bekannten Daten kann der Funktionsgraph gezeichnet werden.



Was wir allerdings noch nicht genau bestimmen können, sind der Hochpunkt und der Tiefpunkt des Graphen. Dazu benötigen wir die Differentialrechnung in einem späteren Kapitel.

Das Problem bei einer ganzrationalen Funktion höheren Grades eine oder mehrere Nullstellen zu finden lässt sich manchmal durch zielstrebiges raten lösen. Dabei kann der Koeffizient a_0 hilfreich sein. Teiler von a_0 können da eventuell weiterhelfen.

Beispiel:

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \qquad a_0 = 8 \Rightarrow T_8 = \{1; 2; 4; 8\}$ (Teilermenge von 8)

Versuch mit $x = 1$: $\quad f(1) = 1 - 5 + 2 + 8 = 6$

Versuch mit $x = 2$: $\quad f(2) = 8 - 20 + 4 + 8 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 2$ ist Nullstelle

Polynomdivision: $\left(x^3 - 5x^2 + 2x + 8\right) : (x - 2) = x^2 - 3x - 4$

$$\begin{array}{lcrrr} & 1 & -5 & 2 & 8 \\ \text{oder HORNER}: \; x_1 = 2 & \downarrow & \underline{+2} & \underline{-6} & \underline{-8} \\ & 1 & -3 & -4 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow 1x^2 - 3x - 4 = 0$$

Lösung von $x^2 - 3x - 4 = 0$ ergibt: $x_2 = 4$ und $x_3 = -1$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_{x_1}(2|0); P_{x_2}(4|0); P_{x_3}(-1|0)}}$

Training GRF_05:

HORNER-Schema, Achsenschnittpunkte, Wertetabelle, Graphen

Machen Sie eine Aussage über das Symmetrieverhalten.
Berechnen Sie mit dem Horner-Schema die Funktionswerte im angegebenen Intervall, (Schrittweite 0,5) bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte, stellen Sie eine Wertetabelle auf und zeichnen Sie den Graphen in ein Koordinatensystem. (Maßstab:1 EH/cm)

1.)	$f(x)=x^3-3x^2-x+3 \quad [-1,5;3,5]$	2.)	$f(x)=x^3-x^2-5x+2 \quad [-2,5;3]$
3.)	$f(x)=2x^3+6x^2-4 \quad [-3;1]$	4.)	$f(x)=x^3-3x^2 \quad [-1;3,5]$
5.)	$f(x)=x^3-3x^2+4 \quad [-1,5;3]$	6.)	$f(x)=x^3-6x^2+9x \quad [-0,5;4]$
7.)	$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}x^2+x+4 \quad [-1,5;4,5]$	8.)	$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \quad [-3;3,5]$
9.)	$f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x-3 \quad [-3;3,5]$	10.)	$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-4 \quad [-0,5;8]$

Training GRF_06:

Achsenschnittpunkte, Wertetabelle, Graphen

Machen Sie eine Aussage über das Symmetrieverhalten.
Berechnen Sie die Funktionswerte im angegebenen Intervall, (Schrittweite 0,5) bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte, stellen Sie eine Wertetabelle auf und zeichnen Sie den Graphen in ein Koordinatensystem. (Maßstab:1 EH/cm)

1.)	$f(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{9}{5}x^2 \quad [-3,5;3,5]$	2.)	$f(x)=\frac{1}{4}x^4-3x^3+\frac{45}{4}x^2-\frac{27}{2}x \quad [-0,5;5,5]$
3.)	$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10} \quad [-4;4]$	4.)	$f(x)=\frac{1}{2}x^4-4x^3+8x^2 \quad [-1;5]$
5.)	$f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3-x^2+6x+\frac{9}{2} \quad [-1,5;3,5]$	6.)	$f(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3 \quad [-1,5;4,5]$
7.)	$f(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{12}{5}x^3+\frac{48}{5}x^2-\frac{64}{5}x \quad [-0,5;5,5]$	8.)	$f(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{8}{5}x^3+\frac{18}{5}x^2-\frac{27}{5} \quad [-1,5;4,5]$
9.)	$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{28}{5} \quad [-4;4]$	10.)	$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{8}{5}x^3+8x^2-\frac{64}{5}x+\frac{3}{2} \quad [-0,5;8,5]$