

Lösungen Text- und Anwendungsaufgaben I

Aus Technik und Wirtschaft

Ergebnisse:

E1	Ergebnis
	<p>Funktionsterm: $K(x) = 0,02x^3 - 1,6x^2 + 44,5x + 730$</p> <p>Der Verkaufspreis pro Stück sollte mindestens $73\frac{2}{3}$ € betragen.</p> <p>Grafik siehe ausführliche Lösung</p>
E2	Ergebnisse
	a) Die maximale Höhe des Balls lässt sich aus der Grafik zu 3 m ablesen.
	b) Der Ball überfliegt die Abwehrmauer (2,573 m > 2 m).
	c) Der Ball schlägt 18 m vom Abschusspunkt auf dem Boden auf.
d) In einer Entfernung von etwa 15,65 m vom Abschusspunkt überfliegt der Ball die Torlinie in 2 m Höhe.	
E3	Ergebnisse
	a) Die Randfunktion ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades weil sie zwei doppelte Nullstellen besitzt. ($x_1 = -4$; $x_2 = 4$)
	b) Funktionsterm: $f(x) = \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4$
c) Das Fenster kann höchstens 4 m breit sein.	
E4	Ergebnisse
	a) Funktionsterm: $f(x) = -\frac{1}{36000}x^4 + \frac{1}{5}x^2$
b) Die Dammkrone hat eine Breite von 80,25 m.	

Ausführliche Lösungen:

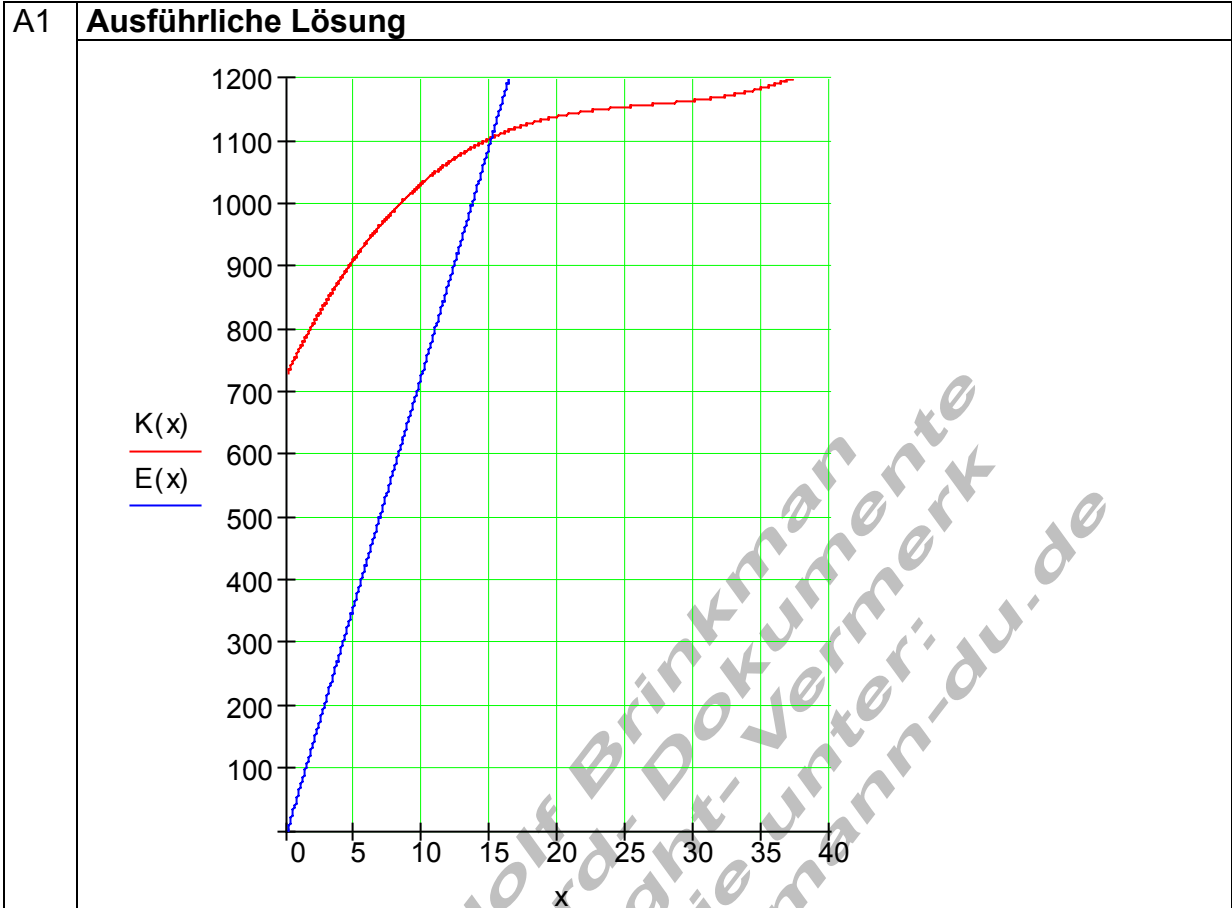
A1	Aufgabe					
	Bei der Herstellung einer Ware entstehen Gesamtkosten in Abhängigkeit von der Stückzahl x	x	5	10	20	35
		K(x)	915	1035	1140	1185
	Bestimmen Sie einen Funktionsterm für die Gesamtkostenfunktion K(x). Wie ist der Verkaufspreis je Stück zu wählen, damit für x = 15 kein Verlust entsteht? Stellen Sie den Sachverhalt graphisch dar.					

A1	Ausführliche Lösung
	Das Gleichungssystem: $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $P_1(5 915): f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + a_0 = 915$ $P_2(10 1035): f(10) = 1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0 = 1035$ $P_3(20 1140): f(20) = 8000a_3 + 400a_2 + 20a_1 + a_0 = 1140$ $P_4(35 1185): f(35) = 42875a_3 + 1225a_2 + 35a_1 + a_0 = 1185$

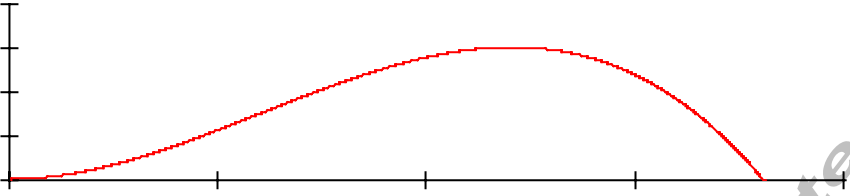
A1	Ausführliche Lösung																																																																																																						
	Der Gauß- Algorithmus:																																																																																																						
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>a_0</th> <th>a_1</th> <th>a_2</th> <th>a_3</th> <th></th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>5</td> <td>25</td> <td>125</td> <td>915</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>10</td> <td>100</td> <td>1000</td> <td>1035</td> <td>II-I</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>20</td> <td>400</td> <td>8000</td> <td>1140</td> <td>III-I</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>35</td> <td>1225</td> <td>42875</td> <td>1185</td> <td>IV-I</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>5</td> <td>25</td> <td>125</td> <td>915</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>5</td> <td>75</td> <td>875</td> <td>120</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>15</td> <td>375</td> <td>7875</td> <td>225</td> <td>III-3·II</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>30</td> <td>1200</td> <td>42750</td> <td>270</td> <td>IV-6·II</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>5</td> <td>25</td> <td>125</td> <td>915</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>5</td> <td>75</td> <td>875</td> <td>120</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>150</td> <td>5250</td> <td>-135</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>750</td> <td>37500</td> <td>-450</td> <td>IV-5·III</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>5</td> <td>25</td> <td>125</td> <td>915</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>5</td> <td>75</td> <td>875</td> <td>120</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>150</td> <td>5250</td> <td>-135</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>11250</td> <td>225</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	a_0	a_1	a_2	a_3			1	5	25	125	915		1	10	100	1000	1035	II-I	1	20	400	8000	1140	III-I	1	35	1225	42875	1185	IV-I	1	5	25	125	915		0	5	75	875	120		0	15	375	7875	225	III-3·II	0	30	1200	42750	270	IV-6·II	1	5	25	125	915		0	5	75	875	120		0	0	150	5250	-135		0	0	750	37500	-450	IV-5·III	1	5	25	125	915		0	5	75	875	120		0	0	150	5250	-135		0	0	0	11250	225	
a_0	a_1	a_2	a_3																																																																																																				
1	5	25	125	915																																																																																																			
1	10	100	1000	1035	II-I																																																																																																		
1	20	400	8000	1140	III-I																																																																																																		
1	35	1225	42875	1185	IV-I																																																																																																		
1	5	25	125	915																																																																																																			
0	5	75	875	120																																																																																																			
0	15	375	7875	225	III-3·II																																																																																																		
0	30	1200	42750	270	IV-6·II																																																																																																		
1	5	25	125	915																																																																																																			
0	5	75	875	120																																																																																																			
0	0	150	5250	-135																																																																																																			
0	0	750	37500	-450	IV-5·III																																																																																																		
1	5	25	125	915																																																																																																			
0	5	75	875	120																																																																																																			
0	0	150	5250	-135																																																																																																			
0	0	0	11250	225																																																																																																			

A1	Ausführliche Lösung Die Koeffizienten und die Funktionsgleichung: $11250a_3 = 225 \Leftrightarrow a_3 = \frac{225}{11250} = 0,02$ $150a_2 + 5250a_3 = -135 \Leftrightarrow a_2 = \frac{-135 - 5250 \cdot 0,02}{150} = -1,6$ $5a_1 + 75a_2 + 875a_3 = 120 \Leftrightarrow a_1 = \frac{120 - 75 \cdot (-1,6) - 875 \cdot 0,02}{5} = 44,5$ $a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 = 915 \Leftrightarrow a_0 = 915 - 5 \cdot 44,5 - 25 \cdot (-1,6) - 125 \cdot 0,02 = 730$ Die Funktionsgleichung: $\underline{\underline{K(x) = 0,02x^3 - 1,6x^2 + 44,5x + 730}}$
-----------	--

A1	Ausführliche Lösung Kosten für die Herstellung von $x = 15$ Stück: $K(15) = 0,02 \cdot 15^3 - 1,6 \cdot 15^2 + 44,5 \cdot 15 + 730 = 1105$ Erlösfunktion: $E(x) = p \cdot x$ mit p als Verkaufspreis pro Stück. Mindestpreis pro Stück: $p = \frac{1105}{15} = 73 \frac{2}{3} \Rightarrow E(x) = 73 \frac{2}{3} x$ Der Verkaufspreis pro Stück sollte mindestens $73 \frac{2}{3}$ € betragen $\underline{\underline{73 \frac{2}{3}}}$
-----------	--



(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright-Vermerk
<http://www.brinkmann-du.de>

A2	Aufgabe
	<p>Der Graph der Funktion $f(x)$ ist näherungsweise die Flugkurve des Balls bei einem Freistoß in einem Fußballspiel.</p> $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2; x > 0$ 
	a) Welche maximale Höhe erreicht der Ball?
	b) Überfliegt der Ball die Abwehrmauer (2 m hoch) in 9,15 m?
	c) Wo kommt der Ball wieder auf den Boden?
	d) Wie weit entfernt vom Tor wurde der Freistoß ausgeführt, wenn der Ball in 2 m Höhe die Torlinie überschreitet?

A2	Ausführliche Lösung
	<p>a) Die maximale Höhe des Balls lässt sich aus der Grafik zu 3 m ablesen. Die Entfernung vom Abschusspunkt beträgt etwa 12 m. Eine exakte Berechnung ist erst mit Hilfe der Differentialrechnung möglich. Wir überprüfen die Abschätzung durch Rechnung. Dabei untersuchen wir die Funktionswerte in der Umgebung von $x = 12$.</p> $f(11,5) = -\frac{1}{288} \cdot 11,5^3 + \frac{1}{16} \cdot 11,5^2 \approx 2,985$ $f(12) = -\frac{1}{288} \cdot 12^3 + \frac{1}{16} \cdot 12^2 = 3$ $f(12,5) = -\frac{1}{288} \cdot 12,5^3 + \frac{1}{16} \cdot 12,5^2 \approx 2,894$ $f(11,75) = -\frac{1}{288} \cdot 11,75^3 + \frac{1}{16} \cdot 11,75^2 \approx 2,996$ $f(12,25) = -\frac{1}{288} \cdot 12,25^3 + \frac{1}{16} \cdot 12,25^2 \approx 2,996$ <p>Wir könnten nun die Intervalle immer enger machen und würden dadurch dem Wert 3 immer näher kommen.</p>

A2	Ausführliche Lösung
	<p>b) Gesucht ist die Flugbahnhöhe in einem Abstand von 9,15 m vom Abschusspunkt, denn dort steht die Mauer der Abwehrspieler.</p> $f(9,15) = -\frac{1}{288} \cdot 9,15^3 + \frac{1}{16} \cdot 9,15^2 \approx 2,573$ <p>Der Ball überfliegt die Abwehrmauer (2,573 m > 2 m).</p>

A2	Ausführliche Lösung
	<p>c) Um den Auftreffpunkt des Balles zu bestimmen, sind die Nullstellen des Funktionsgraphen zu bestimmen.</p> $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \left(-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16} \right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$ $-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{288}x = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 18}}$ <p>Der Ball schlägt 18 m vom Abschusspunkt auf dem Boden auf.</p>

A2	Ausführliche Lösung
	<p>d) Gesucht ist die Entfernung vom Abschusspunkt, in der der Ball eine Höhe von 2 m hat. Aus der Grafik lesen wir zwei Werte ab, sie liegen bei etwa 7,50 m und 16 m. Angesichts der Flugbahn des Balles untersuchen wir die Umgebung von 16 m.</p> $f(x) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 - 2 = 0$ $\Leftrightarrow x^3 - 18x^2 + 576 = 0$ $x = 16 \Rightarrow 16^3 - 18 \cdot 16^2 + 576 = 64 > 0$ $x = 15,5 \Rightarrow 15,5^3 - 18 \cdot 15,5^2 + 576 \approx -24 < 0$ $x = 15,75 \Rightarrow 15,75^3 - 18 \cdot 15,75^2 + 576 \approx 18 > 0$ $x = 15,7 \Rightarrow 15,7^3 - 18 \cdot 15,7^2 + 576 \approx 9 > 0$ $x = 15,65 \Rightarrow 15,65^3 - 18 \cdot 15,65^2 + 576 \approx 0,4 > 0$ <p>In einer Entfernung von etwa 15,65 m vom Abschusspunkt überfliegt der Ball die Torlinie in 2 m Höhe.</p>

A3	Aufgabe
	Die Abbildung zeigt den Giebel eines Barock – Hauses (Maße in m).
a)	Begründen Sie, dass es sich bei der Randfunktion um eine ganzrationale Funktion 4. Grades handelt.
b)	Bestimmen Sie den Funktionsterm.
c)	Ein Fenster der Höhe 2,25 m soll in den Giebel eingepasst werden. Wie breit kann es höchstens sein?

A3	Ausführliche Lösung
	<p>a) Die Randfunktion ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades weil sie zwei doppelte Nullstellen besitzt. ($x_1 = -4$; $x_2 = 4$)</p>

A3	Ausführliche Lösung
b)	<p>Ansatz: $f(x) = a_4 (x+4)^2 (x-4)^2$</p> <p>$P(0 4): f(0) = a_4 (4)^2 (-4)^2 = 4 \Leftrightarrow a_4 = \frac{4}{4^4} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$</p> <p>$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{64} (x+4)^2 (x-4)^2 = \frac{1}{64} x^4 - \frac{1}{2} x^2 + 4$</p>

A3	Ausführliche Lösung
c)	<p>$f\left(\frac{b}{2}\right) = 2,25 \Leftrightarrow \frac{1}{64} x^4 - \frac{1}{2} x^2 + 4 = 2,25 \Leftrightarrow \frac{1}{64} x^4 - \frac{1}{2} x^2 + 1,75 = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow x^4 - 32x^2 + 112 = 0$ biquadratische Gleichung</p> <p>setze $x^2 = z \Rightarrow z^2 - 32z + 112 = 0 \Rightarrow p = -32; q = 112 \Rightarrow D = 144$</p> <p>$z_1 = 16 + \sqrt{144} = 16 + 12 = 28$</p> <p>$z_2 = 16 - \sqrt{144} = 16 - 12 = 4$</p> <p>$x^2 = z \Rightarrow x_1^2 = 28 \Rightarrow x_1 = \sqrt{28} \Rightarrow x_{1-1} \approx 5,29; x_{1-2} \approx -5,29$</p> <p>$x_2^2 = 4 \Rightarrow x_2 = \sqrt{4} \Rightarrow x_{2-1} = 2; x_{2-2} = -2$</p> <p>$\Rightarrow \frac{b}{2} = 2 \text{ m} \Rightarrow$ Das Fenster kann höchstens <u>4 m</u> breit sein.</p>

A4 Aufgabe	
Die symmetrische Querschnittsfläche eines Gebirgstales lässt sich durch eine ganzrationale Funktion 4. Grades beschreiben. Das Tal hat eine maximale Breite von 120 m und ist 360 m tief. Bei einer Breite von 60 m wird von der Talsohle aus eine Höhe von 157,5 m gemessen.	
a) Bestimmen Sie den Funktionsterm.	
b) Ein 250 m hoher Staudamm soll errichtet werden. Wie breit ist die Dammkrone? Berechnen Sie auf eine Dezimalstelle genau.	

A4 Ausführliche Lösung																					
a)	Ansatz : $f(x) = a_4x^4 + a_2x^2$ $P_1(60 360) : f(60) = 12\,960\,000 a_4 + 3\,600a_2 = 360$ $P_2(30 157,5) : f(30) = 810\,000 a_4 + 900a_2 = 157,5$																				
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>a_4</th> <th>a_2</th> <th></th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>810000</td> <td>900</td> <td>157,5</td> <td>$-10800a_2 = -2160 \Leftrightarrow a_2 = \underline{0,2}$</td> </tr> <tr> <td>12960000</td> <td>3600</td> <td>360</td> <td>$810000a_4 + 900a_2 = 157,5$</td> </tr> <tr> <td>810000</td> <td>900</td> <td>157,5</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>-10800</td> <td>-2160</td> <td>$\Leftrightarrow a_4 = \frac{157,5 - 180}{810000} = -\frac{1}{36000}$</td> </tr> </tbody> </table>	a_4	a_2			810000	900	157,5	$-10800a_2 = -2160 \Leftrightarrow a_2 = \underline{0,2}$	12960000	3600	360	$810000a_4 + 900a_2 = 157,5$	810000	900	157,5		0	-10800	-2160	$\Leftrightarrow a_4 = \frac{157,5 - 180}{810000} = -\frac{1}{36000}$
a_4	a_2																				
810000	900	157,5	$-10800a_2 = -2160 \Leftrightarrow a_2 = \underline{0,2}$																		
12960000	3600	360	$810000a_4 + 900a_2 = 157,5$																		
810000	900	157,5																			
0	-10800	-2160	$\Leftrightarrow a_4 = \frac{157,5 - 180}{810000} = -\frac{1}{36000}$																		
	$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{36000}x^4 + \frac{1}{5}x^2$																				

A4 Ausführliche Lösung	
b)	$f\left(\frac{b}{2}\right) = 250 \Leftrightarrow -\frac{1}{36000}x^4 + \frac{1}{5}x^2 = 250 \Leftrightarrow -\frac{1}{36000}x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 250 = 0$ $\Leftrightarrow x^4 - 7\,200x^2 + 9\,000\,000 = 0$
	setze $x^2 = z \Rightarrow z^2 - 7\,200z + 9\,000\,000 = 0$ $\Rightarrow p = -7\,200 ; q = 9\,000\,000 \Rightarrow D = 3\,960\,000$ $z_1 = 3\,600 + \sqrt{3\,960\,000} \approx 5\,589,975$ $z_2 = 3\,600 - \sqrt{3\,960\,000} \approx -1\,610,025$
	$x^2 = z \Rightarrow x_1^2 = 3\,600 + \sqrt{3\,960\,000} \Rightarrow x_{1-1/2} = \pm\sqrt{3\,600 + \sqrt{3\,960\,000}} \approx \pm 74,766$ $x_2^2 = 3\,600 - \sqrt{3\,960\,000} \Rightarrow x_{2-1/2} = \pm\sqrt{3\,600 - \sqrt{3\,960\,000}} \approx \pm 40,125$
	$\frac{b}{2} \approx 40,125 \text{ m} \Rightarrow \text{Breite der Dammkrone } \underline{\underline{80,25 \text{ m}}}$

