Aufstellen der Funktionsgleichung aus gegebenen Bedingungen

Wir erinnern uns, um die Funktionsgleichung einer Parabel zu bestimmen waren die Koordinaten von drei Punkten nötig um die Koeffizienten a_2 , a_1 und a_0 zu bestimmen.
Die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion 3. Grades lautet:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Für die 4 Variablen a_3 , a_2 , a_1 , a_0 benötigt man 4 Bedingungen und damit 4 Bestimmungsgleichungen.

Allgemein lässt sich feststellen, das man für eine Ganzrationale Funktion n – ten Grades n + 1 Bedingungen und damit n + 1 Bestimmungsgleichungen benötigt.

Training GRF_07:

Ganzrationale Funktionen durch 4 Punkte

Finden Sie die Funktionsgleichung und zeichnen Sie den Graphen.
Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte und fehlende Werte mit dem Horner-Schema

1.)	$P_1(1\|4);P_2(2\|2);P_3(4\|4);P_4(5\|20)$
2.)	$P_1\left(1\|-\frac{11}{2}\right);P_2\left(-1\|\frac{9}{2}\right);P_3(-2\|8);P_4\left(-3\|\frac{5}{2}\right)$
3.)	$P_1(-1\|-16);P_2(2\|11);P_3(4\|-11);P_4(6\|-9)$
4.)	$P_1(-1\|7);P_2(-2\|6);P_3(3\|1);P_4(-3\|-2)$
5.)	$P_1(2\|22);P_2(4\|44);P_3(-4\|4);P_4(8\|40)$
6.)	$P_1(1\|0);P_2(-1\|-2);P_3(2\|16);P_4(-3\|-4)$
7.)	$P_1(1\|1);P_2(2\|0);P_3(-2\|4);P_4(3\|9)$
8.)	$P_1(1\|6);P_2(3\|-4);P_3\left(-\frac{1}{2}\|\frac{45}{8}\right);P_4\left(-\frac{3}{2}\|-\frac{77}{8}\right)$
9.)	$P_1\left(1\|-\frac{9}{2}\right);P_2\left(-1\|\frac{11}{2}\right);P_3\left(3\|-\frac{5}{2}\right);P_4\left(-\frac{5}{2}\|-8\right)$
10.)	$P_1(1\|25);P_2(-1\|-49);P_3(3\|27);P_4(5\|5)$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne Copyright-Vermerk erhalten Sie unter http://www.brinkmann

Beispiel für eine Ganzrationale Funktion 3. Grades.

Die Koordinaten von 4 Punkten, die auf dem Funktionsgraphen liegen sollen, sind wie folgt vorgegeben:

$P_1(-1|2); P_2(2|-1); P_3(-3|44); P_4(1|0)$

Zunächst wird das Gleichungssystem für die gegebenen Punkte aufgestellt.

$P_1(-1\|2)$:	$f(-1)$	=	$-1a_3$	$+1a_2$	$-1a_1$	$+1a_0$	=	2
$P_2(2\|-1)$:	$f(2)$	=	$8a_3$	$+4a_2$	$+2a_1$	$+1a_0$	=	-1
$P_3(-3\|44)$:	$f(-3)$	=	$-27a_3$	$+9a_2$	$-3a_1$	$+1a_0$	=	44
$P_4(1\|0)$:	$f(1)$	=	$1a_3$	$+1a_2$	$+1a_1$	$+1a_0$	=	0

Lösung des Gleichungssystems mit dem Gauß – Algorithmus.

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	-1	1	-1	2	
1	2	4	8	-1	II – I
1	-3	9	-27	44	III – I
1	1	1	1	0	IV – I
1	-1	1	-1	2	
0	3	3	9	-3	| : 3
0	-2	8	-26	42	| : 2
0	2	0	2	-2	| : 2
1	-1	1	-1	2	
0	1	1	3	-1	
0	-1	4	-13	21	III + II
0	1	0	1	-1	IV + III
1	-1	1	-1	2	
0	1	1	3	-1	
0	0	5	-10	20	| : 5
0	0	4	-12	20	| : 4
1	-1	1	-1	2	
0	1	1	3	-1	
0	0	1	-2	4	
0	0	1	-3	5	IV – III
1	-1	1	-1	2	
0	1	1	3	-1	
0	0	1	-2	4	
0	0	0	-1	1	

Bestimmen der Koeffizienten durch Rückwärtseinsetzen:

$-a_3 = 1 \Rightarrow \boxed{a_3 = -1}$

$a_2 - 2a_3 = 4$

$\Leftrightarrow a_2 - 2(-1) = a_2 + 2 = 4 \Rightarrow \boxed{a_2 = 2}$

$a_1 + a_2 + 3a_3 = -1$

$\Leftrightarrow a_1 + 2 + 3\cdot(-1) = a_1 + 2 - 3$

$= a_1 - 1 = -1 \Rightarrow \boxed{a_1 = 0}$

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 2$

$\Leftrightarrow a_0 - 0 + 2 - (-1) = a_0 + 2 + 1$

$= a_0 + 3 = 2 \Rightarrow \boxed{a_0 = -1}$

Funktionsgleichung:

$f(x) = -x^3 + 2x^2 - 1$

Probe:

$P_1(-1|2): f(-1) = -(-1)^3 + 2\cdot(-1)^2 - 1 = 2$

$P_2(2|-1): f(2) = -2^3 + 2\cdot 2^2 - 1 = -1$

$P_3(-3|44): f(-3) = -(-3)^3 + 2\cdot(-3)^2 - 1 = 44$

$P_2(1|0): f(1) = -1^3 + 2\cdot 1^2 - 1 = 0$

(c) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne Copyright-Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

Beispiel für eine Ganzrationale Funktion 4. Grades.

Die Koordinaten von 5 Punkten, die auf dem Funktionsgraphen liegen sollen, sind wie folgt vorgegeben:

$P_1(-2\,|\,2)\,;P_2(-1\,|\,0)\,;P_3(1\,|\,0)\,;P_4(2\,|\,2)$ und $P_5(3\,|\,3)$

Zunächst wird das Gleichungssystem für die gegebenen Punkte aufgestellt.

$P_1(-2\,\|\,2):$	$f(-2)$	$=$	$16a_4$	$-8a_3$	$+4a_2$	$-2a_1$	$+1a_0$	$=$	2
$P_2(-1\,\|\,0):$	$f(-1)$	$=$	$1a_4$	$-1a_3$	$+1a_2$	$-1a_1$	$+1a_0$	$=$	0
$P_3(1\,\|\,0):$	$f(1)$	$=$	$1a_4$	$+1a_3$	$+1a_2$	$+1a_1$	$+1a_0$	$=$	0
$P_4(2\,\|\,2):$	$f(2)$	$=$	$16a_4$	$+8a_3$	$+4a_2$	$+2a_1$	$+1a_0$	$=$	2
$P_5(3\,\|\,3):$	$f(3)$	$=$	$81a_4$	$+27a_3$	$+9a_2$	$+3a_1$	$+1a_0$	$=$	3

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4		
1	−2	4	−8	16	2	
1	−1	1	−1	1	0	II − I
1	1	1	1	1	0	III − I
1	2	4	8	16	2	IV − I
1	3	9	27	81	3	V − I
1	−2	4	−8	16	2	
0	1	−3	7	−15	−2	
0	3	−3	9	−15	−2	III − 3·II
0	4	0	16	0	0	IV − 4·II
0	5	5	35	65	1	V − 5·II
1	−2	4	−8	16	2	
0	1	−3	7	−15	−2	
0	0	6	−12	30	4	·10
0	0	12	−12	60	8	IV − 2·III
0	0	20	0	140	11	·3
1	−2	4	−8	16	2	
0	1	−3	7	−15	−2	
0	0	60	−120	300	40	
0	0	0	12	0	0	:12
0	0	60	0	420	33	V − III
1	−2	4	−8	16	2	
0	1	−3	7	−15	−2	
0	0	60	−120	300	40	
0	0	0	1	0	0	
0	0	0	120	120	−7	

$\boxed{a_3 = 0}$

$120a_4 = -7 \Rightarrow a_4 = \boxed{-\frac{7}{120}}$

$60a_2 + 300a_4 = 40$

$\Leftrightarrow 60a_2 + 300\cdot\left(-\frac{7}{120}\right) = 40$

$\Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{23}{24}}$

$a_1 - 3a_2 - 15a_4 = -2$

$\Leftrightarrow a_1 - 3\cdot\frac{23}{24} - 15\cdot\left(-\frac{7}{120}\right) = -2$

$\Rightarrow \boxed{a_1 = 0}$

$a_0 + 4a_2 + 16a_4 = 2$

$\Leftrightarrow a_0 + 4\cdot\frac{23}{24} + 16\cdot\left(-\frac{7}{120}\right) = 2$

$\Rightarrow \boxed{a_0 = -\frac{9}{10}}$

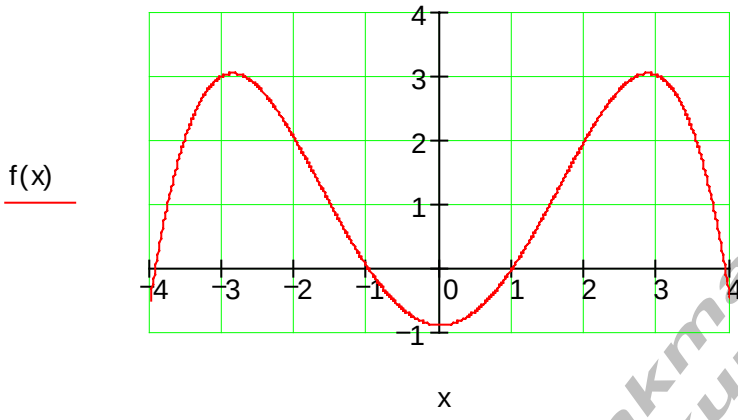
Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\frac{7}{120}x^4 + \frac{23}{24}x^2 - \frac{9}{10}$$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne Copyright-Vermerk http://www.brinkmann-du.de Sie unterhalten sich unter:

Der Funktionsgraph kann über eine Wertetabelle ermittelt werden und hat folgenden Verlauf:

$$f(x) := \frac{-7}{120}\cdot x^4 + \frac{23}{24}\cdot x^2 - \frac{9}{10}$$



Sind weitere Eigenschaften über den Funktionsgraphen bekannt, so kann die Anzahl der Bestimmungsgleichungen reduziert werden.

Beispiel eines punktsymmetrischen Graphen:

Der Graph einer ganzrationalen Fuktion 3. Grades ist punktsymmetrisch und durchläuft folgende Punkte: $P_1(1|2)$ und $P_2\left(\sqrt{2}\,|\,\sqrt{2}\right)$

Wegen der Punktsymmetrie besteht die Funktionsgleichung nur aus Summanden mit ungeraden Exponenten.

Ansatz: $f(x) = a_3x^3 + a_1x$

$P_1(1|2)$: $f(1) = 1a_3 + 1a_1 = 2$

$P_2\left(\sqrt{2}\,|\,\sqrt{2}\right)$: $f\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}a_3 + \sqrt{2}a_1 = \sqrt{2}$

a_3	a_1	
1	1	2
$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\,\vert:\sqrt{2}$
1	1	2
2	1	$1\text{II} - 2\cdot\text{I}$
1	1	2
0	−1	−3

$\boxed{a_1 = 3}$

$a_3 + a_1 = 2$

$\Leftrightarrow a_3 + 3 = 2 \Rightarrow \boxed{a_3 = -1}$

Funktionsgleichung:

$f(x) = -x^3 + 3x$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne Copyright-Vermerk http://www.brinkmann-du.de erhalten sie unter:

Beispiel einer ganzrationalen Funktion 4. Grades durch den Ursprung.

Die Koordinaten von 4 Punkten sind gegeben. Der 5. Punkt ist der Ursprung.
Dadurch entstehen 4 Bestimmungsgleichungen.

Punktvorgabe: $P_1(-1|2);P_2(1|-2);P_3(2|-4);P_4(3|18)$

Allgemeine Funktionsgleichung: $f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

$P(0|0)$: $f(0)=a_0=0 \Rightarrow \boxed{a_0=0} \Rightarrow$ Ansatz: $f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x$

$P_1(-1|2)$: $f(-1)=1a_4-1a_3+1a_2-1a_1=2$

$P_2(1|-2)$: $f(1)=1a_4+1a_3+1a_2+1a_1=-2$

$P_3(2|-4)$: $f(2)=16a_4+8a_3+4a_2+2a_1=-4$

$P_3(3|18)$: $f(3)=81a_4+27a_3+9a_2+3a_1=18$

a_4	a_3	a_2	a_1	
1	−1	1	−1	2
1	1	1	1	−2 II − I
16	8	4	2	−4 III − 16 · I
81	27	9	3	18 IV − 81 · I
1	−1	1	−1	2
0	2	0	2	−4
0	24	−12	18	−36 III − 12 · II
0	108	−72	84	−144 IV − 4,5 · III
1	−1	1	−1	2
0	2	0	2	−4
0	0	−12	−6	12
0	0	−18	3	18 IV − 1,5 · III
1	−1	1	−1	2
0	2	0	2	−4
0	0	−12	−6	12
0	0	0	12	0

$\boxed{a_1=0}$

$2a_3=-4 \Rightarrow \boxed{a_3=-2}$

$-12a_2=12 \Rightarrow \boxed{a_2=-1}$

$a_4-a_3+a_2=2$

$\Leftrightarrow a_4+2-1=2 \Rightarrow \boxed{a_4=1}$

Funktionsgleichung:

$\underline{\underline{f(x)=x^4-2x^3-x}}$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright-Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

Beispiel: Ganzrationale Funktion 4. Grades achsensymmetrisch

Der Graph einer ganzrationalen Fuktion 4. Grades ist achsensymmetrisch und durchläuft folgende Punkte: $P_1(0|4)$ $P_2\left(1|\frac{25}{8}\right)$ und $P_3(2|2)$

Ansatz: $f(x)=a_4x^4+a_2x^2+a_0$ wegen Achsensymmetrie nur gerade Exponenten

$P_1(0|4)$: $f(0)=a_0=4 \Rightarrow \boxed{a_0=4}$

$P_2\left(1|\frac{25}{8}\right)$: $f(1)=1a_4+1a_2+4=\frac{25}{8} \Leftrightarrow 1a_4+1a_2=-\frac{7}{8}$

$P_3(2|2)$: $f(2)=16a_4+4a_2+4=2 \Leftrightarrow 16a_4+4a_2=-2$

a_4	a_2	
1	1	$-\frac{7}{8}\mid\cdot 8$
16	4	$-2\mid:2$
8	8	-7
8	2	$-1\text{II}-\text{I}$
1	1	-7
0	-6	6

$-6a_2=6 \Rightarrow \boxed{a_2=-1}$

$8a_4+8a_2=-7$

$\Leftrightarrow 8a_4-8=-7 \Rightarrow \boxed{a_4=\frac{1}{8}}$

$f(x)=\frac{1}{8}x^4-x^2+4$

Vorgabe aller Nullstellen und eines Punktes.

Ganzrationale Funktion 3. Grades

$P_{x1}(-3|0);P_{x2}(-1|0);P_{x3}(1|0);P(0|-2)$

Ansatz über Linearfaktoren:

$f(x)=a(x+3)(x+1)(x-1)$

$P(0|-2)$: $f(0)=a\cdot 3\cdot 1\cdot(-1)=-2 \Rightarrow a=\frac{2}{3}$

$f(x)=\frac{2}{3}(x+3)(x+1)(x-1)=\frac{2}{3}x^3+2x^2-\frac{2}{3}x-2$

Ganzrationale Funktion 4. Grades

$P_{x1}(-2|0);P_{x2}(-2|0);P_{x3}(-2|0);P_4(3|0);P(0|1{,}5)$

Ansatz über Linearfaktoren:

$f(x)=a(x+2)^3(x-3)$

$P(0|1{,}5)$: $f(0)=a\cdot 8\cdot(-3)=1{,}5 \Leftrightarrow -24a=1{,}5 \Rightarrow a=-\frac{3}{48}=-\frac{1}{16}$

$f(x)=-\frac{1}{16}(x+2)^3(x-3)=-\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{16}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{7}{4}x+\frac{3}{2}$

(C) Rudolf Brinkmann Original World- Dokumente ohne Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

Training GRF_08:

Ganzrationale Funktionen aus gegebenen Bedingungen

Finden Sie die Funktionsgleichung und skizzieren Sie den Graphen.

1.)	grad 3, punktsymmetrisch $P_1(2\,|\,3)$ $P_2(-3\,|\,-2)$
2.)	grad 3, Nullstellen $x_1 = -3$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$; $P(-2\,|\,2)$
3.)	grad 3, Nullstellen $x_{1/2} = 0$; $x_3 = 2$; $P(1\,|\,5)$
4.)	grad 3, Nullstellen $x_{1/2} = -2$; $x_3 = 1$; $P(2\,|\,4)$
5.)	grad 3, Nullstellen $x_{1/2/3} = 3$; $P(-1\,|\,8)$
6.)	grad 4, achsensymmetrisch $P_1(1\,|\,2)$; $P_2(2\,|\,-1)$; $P_3(-3\,|\,-2)$
7.)	grad 4, Nullstellen $x_{1/2/3} = -2$; $x_4 = 2$; $P(1\,|\,3)$
8.)	grad 4, durch den Ursprung $P_1(1\,|\,1)$; $P_2(-1\,|\,-3)$; $P_3(3\,|\,-1)$; $P_4(-3\,|\,-1)$
9.)	grad 4, Nullstellen $x_1 = -3$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 5$; $P(1\,|\,2)$
10.)	grad 4, Nullstellen $x_{1/2} = -3$; $x_{3/4} = 2$; $P(1\,|\,4)$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de