

Beispiel einer Kostenrechnung

Aufgabe 1:

Betriebliche Daten:

Gesamtkosten $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Fixkosten: $K_f(x) = 420$ GE

variable Stückkosten: $k_v(x) = 300$ GE/ME

bei einer Ausbringung von $x = 10$ ME

Betriebsminimum $k'_v(x) = 200$ GE

bei einer Ausbringung von $x = 5$ ME

a) Kostenfunktionsgleichung aufstellen

b) Bei 15 ME decken die Erlöse die

Kosten ($E(x) = K(x)$)

bestimmen Sie unter der

Voraussetzung das eine lineare

Erlösfunktion gegeben ist, den

Absatzpreis

c) Bestimmen Sie die Gewinnzone

d) Bestimmen Sie das Gewinnmaximum

Lösung:

a) Aufstellen der Kostenfunktion $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Fixkosten: $K_f(x) = K(0) = d = 420 \Rightarrow \underline{\underline{d = 420}}$

variable Stückkostenfunktion: $k_v(x) = ax^2 + bx + c$

$k_v(10) = 100a + 10b + c = 300$ Gleichung I

Betriebsminimum $K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = k'_v(x)$

$K'(5) = 75a + 10b + c = 200$ Gleichung II

$k_v(5) = 25a + 5b + c = 200$ Gleichung III

a	b	c	
100	10	1	300 vertausche
75	10	1	200 I mit III
25	5	1	200
25	5	1	200
75	10	1	200 II - 3 · I
100	10	1	300 III - 4 · I
25	5	1	200
0	-5	-2	-400 · (-1)
0	-10	-3	-500
25	5	1	200
0	5	2	400
0	-10	-3	-500 III + 2 · II
25	5	1	200
0	5	2	400
0	0	1	300

Zurückrechnen:

$\underline{\underline{c = 300}}$

$5b + 2 \cdot 300 = 400 \Rightarrow \underline{\underline{b = -40}}$

$25a + 5 \cdot (-40) + 300 = 200 \Rightarrow \underline{\underline{a = 4}}$

Kostenfunktion:

$\underline{\underline{K(x) = 4x^3 - 40x^2 + 300x + 420}}$

b) Absatzpreis:

$$E(x) = p \cdot x$$

$$E(15) = 15p = K(15) \Rightarrow p = \frac{K(15)}{15}$$

$$p = \frac{4 \cdot 15^3 - 40 \cdot 15^2 + 300 \cdot 15 + 420}{15} = \frac{9420}{15} = \underline{\underline{628}}$$

Der Absatzpreis beträgt 628 GE

c) Gewinnzone:

$$\text{Gewinnfunktion: } G(x) = E(x) - K(x) = 628x - 4x^3 + 40x^2 - 300x - 420$$

$$G(x) = -4x^3 + 40x^2 + 328x - 420$$

Die Gewinnzone befindet sich dort, wo gilt: $G(x) > 0$

$$1. \text{ Nullstelle: da f\u00fcr 15 ME gilt } E(x) = K(x) \Rightarrow G(15) = E(15) - K(15) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{(15 | 0)}}$$

Polynomdivision:

$$(-4x^3 + 40x^2 + 328x - 420) : (x - 15) = \underline{\underline{-4x^2 - 20x + 28}}$$

$$-(-4x^3 + 60x^2)$$

$$-20x^2 + 328x$$

$$-(-20x^2 + 300x)$$

$$28x - 420$$

$$-(28x - 420)$$

$$-4x^2 - 20x + 28 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 7 = 0 \Rightarrow p = 5 \quad q = -7$$

$$x_{1/2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{28}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{53}{4}} \Rightarrow x_1 \approx 1,14 \quad x_2 \approx -6,14$$

$$\text{Gewinnzone liegt im Intervall } \underline{\underline{I = \left\{ x \mid -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{53}{4}} \leq x \leq 15 \right\}}}_{\mathbb{R}}$$

d) Gewinnmaximum

$$G(x) = -4x^3 + 40x^2 + 328x - 420$$

$$G'(x) = -12x^2 + 80x + 328$$

$$G''(x) = -24x + 80$$

$$G'(x) = 0 \Leftrightarrow -12x^2 + 80x + 328 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{82}{3} = 0 \Rightarrow p = -\frac{20}{3} \quad q = -\frac{82}{3}$$

$$x_{1/2} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{246}{9}} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{346}{9}}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{10}{3} + \sqrt{\frac{346}{9}} \approx 9,53 \quad x_2 = \frac{10}{3} - \sqrt{\frac{346}{9}} \approx -2,87$$

$$G(x_1) = G\left(\frac{10}{3} + \sqrt{\frac{346}{9}}\right) \approx 2876,6 \Rightarrow \text{Gewinnmaximum bei } \underline{\underline{(9,53\text{ME} \mid 2879,6\text{GE})}}$$

