Lösungen Differenzialrechnung V

Ausführliche Lösungen:

Ableitungsregeln der Differentialrechnung	
Potenzregel	$f(x)=x^q \Rightarrow f'(x)=q\cdot x^{q-1}$ $\text{Beispiel}: f(x)=x^4 \Rightarrow f'(x)=4\cdot x^{4-1}=\underline{\underline{4x^3}}$
Konstantenregel	$f(x)=c\cdot u(x) \Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x)$ $\text{Beispiel}: f(x)=3\cdot x^5 \Rightarrow f'(x)=3\cdot 5\cdot x^4=\underline{\underline{15x^4}}$
Summenregel	$f(x)=u(x)\pm v(x) \Rightarrow f'(x)=u'(x)\pm v'(x)$ $\text{Beispiel}: f(x)=x^5+x^3 \Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{5\cdot x^4+3\cdot x^2}}$
Produktregel	Eine Funktion ist zusammengesetzt aus dem Produkt zweier Einzelfunktionen. Dann wird die Ableitung wie folgt gebildet: $f(x)=u(x)\cdot v(x) \Rightarrow f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$ Beispiel: $f(x)=x^2\cdot x^3 \quad u(x)=x^2 \quad v(x)=x^3 \Rightarrow u'(x)=2x \quad v'(x)=3x^2$ $f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)=2x\cdot x^3+x^2\cdot 3x^2=2x^4+3x^4=\underline{\underline{5x^4}}$
Quotientenregel	Eine Funktion ist zusammengesetzt aus den Quotienten zweier Funktionen $u(x)$ und $v(x)$. Dann wird die Ableitung der Funktion wie folgt gebildet: $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$ Beispiel: $f(x)=\frac{x}{x+2} \quad u(x)=x \quad v(x)=x+2$ $\Rightarrow u'(x)=1 \quad v'(x)=1 \quad [v(x)]^2=(x+2)^2$ $f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}=\frac{1\cdot(x+2)-x\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{x+2-x}{(x+2)^2}=\underline{\underline{\frac{2}{(x+2)^2}}}$
Kettenregel	Sind in einer Funktion die Terme mit der Variablen x so zusammengefasst, dass eine übergeordnete Variable z entsteht, so kann diese Funktion als Funktion einer Funktion betrachtet werden. Dann ist die Ableitung dieser Funktionskette gleich der äußeren Ableitung multipliziert mit der inneren Ableitung. $f(x)=f[z(x)] \Rightarrow f'(x)=\underbrace{f'(z)}_{\text{äußere Ableitung}}\cdot\underbrace{z'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$ Beispiel: $f(x)=\left(x^2+2\right)^2$ Substitution: $z(x)=x^2+2 \quad f(z)=z^2 \Rightarrow f'(z)=2z \quad z'(x)=2x$ $f'(x)=f'(z)\cdot z'(x)=2z\cdot 2x=2\left(x^2+2\right)\cdot 2x=\underline{\underline{4x^3+8x}}$

A1	**Aufgabe**			
	Leiten Sie ab.			
	a)	$f(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x$	b)	$f(x)=-\frac{2}{3}x^3+x^2$
	c)	$f(x)=-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3+3x^2$	d)	$f(x)=6x^2-\frac{2}{3}x^4$
	e)	$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3$	f)	$f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x+3$
	g)	$f(x)=\frac{3}{8}x^3-\frac{3}{2}x$	h)	$f(x)=x^3-3x^2-x+3$
	i)	$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2-x-5$	j)	$f(x)=\frac{1}{48}x^4-\frac{1}{2}x^2$

A1	**Ausführliche Lösungen**	
	a)	$f(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x \Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$
	b)	$f(x)=-\frac{2}{3}x^3+x^2 \Rightarrow f'(x)=-2x^2+2x$
	c)	$f(x)=-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3+3x^2 \Rightarrow f'(x)=-x^3-\frac{3}{2}x^2+6x$
	d)	$f(x)=6x^2-\frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x)=-\frac{8}{3}x^3+12x$
	e)	$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3 \Rightarrow f'(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2$
	f)	$f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x+3 \Rightarrow f'(x)=2x^2-2$
	g)	$f(x)=\frac{3}{8}x^3-\frac{3}{2}x \Rightarrow f'(x)=\frac{9}{8}x^2-\frac{3}{2}$
	h)	$f(x)=x^3-3x^2-x+3 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x-1$
	i)	$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2-x-5 \Rightarrow f'(x)=-x^2+2x-1$
	j)	$f(x)=\frac{1}{48}x^4-\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{12}x^3-x$

A2	**Aufgabe**					
	Bilden Sie die Ableitungen folgender Funktionen. Verwenden Sie die Ihnen bekannten Ableitungsregeln. Notieren Sie die Regel, die Sie jeweils benutzten.					
	a)	$f(x) = 4x^3$	b)	$f(x) = 3e^x$	c)	$f(x) = 5\ln x$
	d)	$f(x) = x^2 + x$	e)	$f(x) = 2x^3 - 3x^2$	f)	$f(x) = 4x^5 - 2\ln x + 3e^x$
	g)	$f(x) = x \cdot e^x$	h)	$f(x) = x^2 \cdot \ln x$	i)	$f(x) = x^3 \cdot (x^2 - 1)$

A2a Ausführliche Lösung

$$f(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot \left(x^3\right)' = 4 \cdot 3x^2 = \underline{\underline{12x^2}}$$

Konstantenregel

A2b

$$f(x) = 3 \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot \left(e^x\right)' = \underline{\underline{3e^x}}$$

Konstantenregel

A2c

$$f(x) = 3 \cdot \ln(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = 3 \cdot \left[\ln(x)\right]'$$
$$= 3 \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{\frac{3}{x}}}$$

Bemerkung: $\left[\ln(x)\right]' = \frac{1}{x}$

Konstantenregel

A2d

$$f(x) = x^2 + x \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{2x + 1}}$$

Summenregel

A2e

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2$$
$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x$$
$$= \underline{\underline{6x^2 - 6x}}$$

Summenregel, Konstantenregel

A2f

$$f(x) = 4x^5 - 2 \cdot \ln(x) + 3 \cdot e^x$$
$$\Rightarrow f'(x) = 4 \cdot 5x^4 - 2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot e^x$$
$$= \underline{\underline{20x^4 - \frac{2}{x} + 3e^x}}$$

Summenregel, Konstantenregel

A2g	$f(x)=x\cdot e^x \Rightarrow f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ mit $u=x\,;u'=1;\,v=e^x\,;v'=e^x$ $\Rightarrow f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x$ $=\underline{\underline{(x+1)e^x}}$ Produktregel

A2h	$f(x)=x^2\cdot\ln(x)\Rightarrow f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ mit $u=x^2\,;u'=2x\,;v=\ln(x)\,;v'=\frac{1}{x}$ $\Rightarrow f'(x)=2x\cdot\ln(x)+x^2\cdot\frac{1}{x}$ $=2x\cdot\ln(x)+x=\underline{\underline{(2\ln x+1)x}}$ Produktregel

A2i	$f(x)=x^3\cdot(x^2-1)\Rightarrow f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ mit $u=x^3\,;u'=3x^2\,;v=x^2-1;\,v'=2x$ $\Rightarrow f'(x)=3x^2\cdot(x^2-1)+x^3\cdot 2x$ $=3x^4-3x^2+2x^4=\underline{\underline{5x^4-3x^2}}$ Produktregel, Summenregel

A3	**Aufgabe**				
	Bilden Sie die Ableitungen folgender Funktionen. Verwenden Sie die Ihnen bekannten Ableitungsregeln. Notieren Sie die Regel, die Sie jeweils benutzten.				
a)	$f(x)=\frac{x+1}{x}$	b)	$f(x)=\frac{x}{x+1}$	c)	$f(x)=\frac{(x+1)\cdot e^x}{x}$
d)	$f(x)=(x+1)^2$	e)	$f(x)=(x^2+1)^2$	f)	$f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$
g)	$f(x)=2ax^3-4bx$	h)	$f(x)=e^{ax}$	i)	$f(x)=e^{-(x-2)}$

A3a	**Ausführliche Lösung**
	$f(x)=\frac{x+1}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ mit $u=x+1;\,u'=1;\,v=x\,;v'=1;\,v^2=x^2$ $\Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot x-(x+1)\cdot 1}{x^2}$ $=\frac{x-x-1}{x^2}=\underline{\underline{-\frac{1}{x^2}}}$ Quotientenregel

A3b	$f(x)=\frac{x}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ mit $u=x\,;u'=1;v=x+1;v'=1;v^2=(x+1)^2$ $\Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}$ $=\frac{x+1-1}{(x+1)^2}=\underline{\underline{\frac{1}{(x+1)^2}}}$ Quotientenregel, Summenregel
A3c	$f(x)=\frac{(x+1)e^x}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ mit $u=(x+1)e^x\,;u'=e^x+(x+1)e^x\,;v=x\,;v'=1;v^2=x^2$ $\Rightarrow f'(x)=\frac{\left[e^x+(x+1)e^x\right]\cdot x-(x+1)e^x\cdot 1}{x^2}$ $=\frac{xe^x+x^2e^x+xe^x-xe^x-e^x}{x^2}=\underline{\underline{\frac{(x^2+x-1)e^x}{x^2}}}$ Quotientenregel, Produktregel, Summenregel
A3d	$f(x)=(x+1)^2\Rightarrow f'(x)=f'(z)\cdot z'$ $z=x+1\Rightarrow z'=1\quad f(z)=z^2\Rightarrow f'(z)=2z$ $\Rightarrow f'(x)=f'(z)\cdot z'=2(x+1)\cdot 1=\underline{\underline{2(x+1)}}$ Kettenregel
A3e	$f(x)=(x^2+1)^2\Rightarrow f'(x)=f'(z)\cdot z'$ $z=x^2+1\Rightarrow z'=2x\quad f(z)=z^2\Rightarrow f'(z)=2z$ $\Rightarrow f'(x)=f'(z)\cdot z'=2(x^2+1)\cdot 2x$ $=4x(x^2+1)=\underline{\underline{4x^3+4x}}$ Kettenregel
A3f	$f(x)=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow f'(x)=f'(z)\cdot z'$ $z=\frac{1}{2}x\Rightarrow z'=\frac{1}{2}\quad f(z)=e^z\Rightarrow f'(z)=e^z$ $\Rightarrow\quad f'(x)=f'(z)\cdot z'=e^{\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}}}$ Kettenregel

A3g	$f(x)=2ax^3-4bx$ $\Rightarrow f'(x)=2\cdot 3ax^2-4b=\underline{\underline{6ax^2-4b}}$ Summenregel, Konstantenregel

A3h	$f(x)=e^{ax}\Rightarrow f'(x)=f'(z)\cdot z'$ $z=ax\Rightarrow z'=a \quad f(z)=e^z\Rightarrow f'(z)=e^z$ $\Rightarrow f'(x)=f'(z)\cdot z'=e^{ax}\cdot a=\underline{\underline{ae^{ax}}}$ Kettenregel

A3i	$f(x)=e^{-(x-2)}\Rightarrow f'(x)=f'(z)\cdot z'$ $z=-(x-2)=-x+2\Rightarrow z'=-1 \quad f(z)=e^z\Rightarrow f'(z)=e^z$ $\Rightarrow f'(x)=f'(z)\cdot z'=e^{-(x-2)}\cdot(-1)=\underline{\underline{-e^{-(x-2)}}}$ Kettenregel

A4	**Aufgabe**			
	Bilden Sie die Ableitungen folgender Funktionen:			
	a)	$f(x)=3x^3-2x^2+x-7$	b)	$f(x)=x^2\cdot e^x\cdot\sqrt{x}$
	c)	$f(x)=\dfrac{x^2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3}}{x^3}$	d)	$f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$
	e)	$f(x)=(a^2+x)^2$	f)	$f(x)=(2x^3-3)^2$

A4a	**Ausführliche Lösung**
	$f(x)=3x^3-2x^2+x-7$ $\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{9x^2-4x+1}}$

A4b	$f(x)=x^2\cdot e^x\cdot\sqrt{x}=x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot e^x=\underbrace{x^{\frac{5}{2}}}_{u}\cdot\underbrace{e^x}_{v}\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$ mit $u=x^{\frac{5}{2}}\Rightarrow u'=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$ und $v=e^x\Rightarrow v'=e^x$ wird $f'(x)=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}\cdot e^x+x^{\frac{5}{2}}\cdot e^x=\underline{\underline{\left(\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}\right)e^x}}$

A4c	$f(x)=\dfrac{x^2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3}}{x^3}=\dfrac{x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}}}{x^3}$ $=\dfrac{x^{\frac{4}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}}{x^3}=\dfrac{x^{\frac{8}{2}}}{x^3}=\dfrac{x^4}{x^3}=x$ $\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{1}}$

A4d

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

mit $u=2x-1\Rightarrow u'=2$ und $v=x+2\Rightarrow v'=1$ und $v^2=(x+2)^2$ wird

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2\cdot(x+2)-(2x-1)\cdot 1}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2}=\underline{\underline{\frac{5}{(x+2)^2}}}$$

A4e

$$f(x)=(a^2+x)^2$$

$$\Rightarrow f'(x)=2\left(a^2+x\right)\cdot 1=\underline{\underline{2\left(a^2+x\right)}}$$

A4f

$$f(x)=\left(2x^3-3\right)^2$$

$$\Rightarrow f'(x)=2\left(2x^3-3\right)\cdot 6x^2$$

$$=12x^2\left(2x^3-3\right)=\underline{\underline{24x^5-36x^2}}$$

A5 **Aufgabe**

Bilden Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

a)	$f(x)=\left(x+e^x\right)\cdot\ln x$	b)	$f(x)=\ln(x^2-1)$
c)	$f(x)=(x+1)\cdot e^{(x+1)}$	d)	$f(x)=a\ln x-be^x-3x^2$
e)	$f(x)=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$	f)	$f(x)=\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}$

A5a **Ausführliche Lösung**

$$f(x)=\underbrace{\left(x+e^x\right)}_{u}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{v}\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$$

mit $u=x+e^x\Rightarrow u'=1+e^x$ und $v=\ln(x)\Rightarrow v'=\frac{1}{x}$ wird

$$f'(x)=\left(1+e^x\right)\cdot\ln(x)+\left(x+e^x\right)\cdot\frac{1}{x}=\underline{\underline{\ln x+\ln x\cdot e^x+1+\frac{e^x}{x}}}$$

A5b

$$f(x)=\ln\left(x^2-1\right)\Rightarrow f'(x)=f'(z)\cdot z'$$

$$z=x^2-1\Rightarrow z'=2x\quad f(z)=\ln(z)\Rightarrow f'(z)=\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow f'(x)=f'(z)\cdot z'=\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x=\underline{\underline{\frac{2x}{x^2-1}}}$$

A5c

$$f(x)=(x+1)\cdot e^{(x+1)} \Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$$

mit $u=(x+1) \Rightarrow u'=1$ und $v=e^{(x+1)} \Rightarrow v'=e^{(x+1)}$

$$\Rightarrow f'(x)=1\cdot e^{(x+1)}+(x+1)e^{(x+1)}$$

$$=\left[1+(x+1)\right]e^{(x+1)}=\underline{\underline{(x+2)e^{(x+1)}}}$$

A5d

$$f(x)=a\cdot\ln(x)-b\cdot e^{x}-3\cdot x^{2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{\frac{a}{x}-be^{x}-6x}}$$

A5e

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

mit $u=(x+1)^2 \Rightarrow u'=2(x+1)$ und $v=(x-1)^2 \Rightarrow v'=2(x-1)$

und $v^2=(x-1)^4$ wird

$$f'(x)=\frac{2(x+1)\cdot(x-1)^2-(x+1)^2\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)\left[2(x+1)(x-1)-2(x+1)^2\right]}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{2(x+1)(x-1)-2(x+1)^2}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{2(x^2-1)-2(x+1)^2}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{2x^2-2-2x^2-4x-2}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{-4x-4}{(x-1)^3}=\underline{\underline{-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}}}$$

A5f

$$f(x)=\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}=\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{3+x}{3-x}\right)' \quad \text{Kettenregel}$$

Zwischenrechnung:

$$\left(\frac{3+x}{3-x}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \quad u=3+x\Rightarrow u'=1;\ v=3-x\Rightarrow v'=-1;\ v^2=(3-x)^2$$

$$\left(\frac{3+x}{3-x}\right)'=\frac{1\cdot(3-x)-(3+x)\cdot(-1)}{(3-x)^2}=\frac{3-x+3+x}{(3-x)^2}=\frac{6}{(3-x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{6}{(3-x)^2}=\frac{3(3-x)^{\frac{1}{2}}}{(3+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(3-x)^2}=\frac{3(3-x)^{-\frac{3}{2}}}{(3+x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{3}{(3-x)^{\frac{3}{2}}(3+x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{(3-x)(3-x)^{\frac{1}{2}}(3+x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{3}{(3-x)\left[(3-x)(3+x)\right]^{\frac{1}{2}}}=\underline{\underline{\frac{3}{(3-x)(9-x^2)^{\frac{1}{2}}}}}$$

A6 Aufgabe

Leiten Sie folgende Funktionen dreimal ab.

a)	$f(x)=3x+4$	b)	$f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3$
c)	$f(x)=3x^3+2x^2+x+1$	d)	$f(x)=(2x+1)^3$
e)	$f(x)=x-x^4+3+x$	f)	$f(x)=1-2x-3x-4x+x^4$
g)	$f(x)=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$	h)	$f(x)=4x^3-2x^2+5x-2$

A6a Ausführliche Lösung

$$f(x)=3x+4\Rightarrow f'(x)=3 \qquad f''(x)=0 \qquad f'''(x)=0$$

A6b

$$f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3=5x^3-3x-4$$

$$\Rightarrow f'(x)=15x^2-3 \qquad f''(x)=30x \qquad f'''(x)=30$$

A6c

$$f(x)=3x^3+2x^2+x+1$$

$$\Rightarrow f'(x)=9x^2+4x+1 \qquad f''(x)=18x+4 \qquad f'''(x)=18$$

A6d

$$f(x)=(2x+1)^3$$

$$\Rightarrow f'(x)=3(2x+1)^2\cdot2=6\left(4x^2+4x+1\right)=24x^2+24x+6$$

$$f''(x)=48x+24 \quad f'''(x)=48$$

A6e	$f(x) = x - x^4 + 3 + x = -x^4 + 2x + 3$ $\Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 2 \qquad f''(x) = -12x^2 \qquad f'''(x) = -24x$

A6f	$f(x) = 1 - 2x - 3x - 4x + x^4 = x^4 - 9x + 1$ $\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 9 \qquad f''(x) = 12x^2 \qquad f'''(x) = 24x$

A6g	$f(x) = \underbrace{a + b + c^2}_{\text{Konstante}} - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$ $f'(x) = -1 - a - b - 3cx^2 - c^3 = -3cx^2 - \underbrace{a - b - c^3 - 1}_{\text{Konstante}}$ $f''(x) = -6cx \qquad f'''(x) = -6c$

A6h	$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ $\Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 4x + 5 \qquad f''(x) = 24x - 4 \qquad f'''(x) = 24$