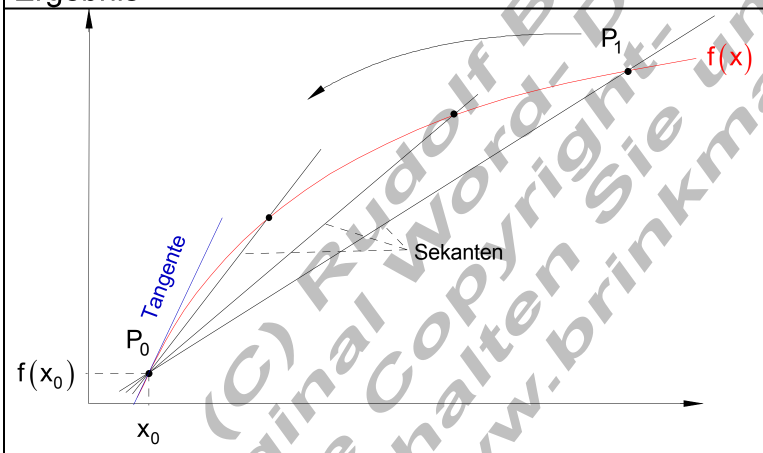
Lösungen Differenzialrechnung zur Vorbereitung der Klassenarbeit I

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$
	b)	rel. Min = Scheitelpunkt: $P_{Min}(-2 \mid -4) = P_{Sp}(-2 \mid -4)$
	c)	$P_{x1}\left(-2 + 2 \cdot \sqrt{2} \approx 0,83 \mid 0\right)$ $P_{x2}\left(-2 - 2 \cdot \sqrt{2} \approx -4,83 \mid 0\right)$
	d)	Siehe ausführliche Lösung.

E2	Ergebnis
	Die Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt ist gleich der Steigung der Tangente in diesem Punkt.

E3	Ergebnis
	
	Bewegt man den Punkt P_1 immer weiter auf P_0 zu, so ändert sich die Sekantensteigung. Je mehr man sich dem Punkt P_0 nähert, desto mehr nähert sich die Sekantensteigung der Tangentensteigung.

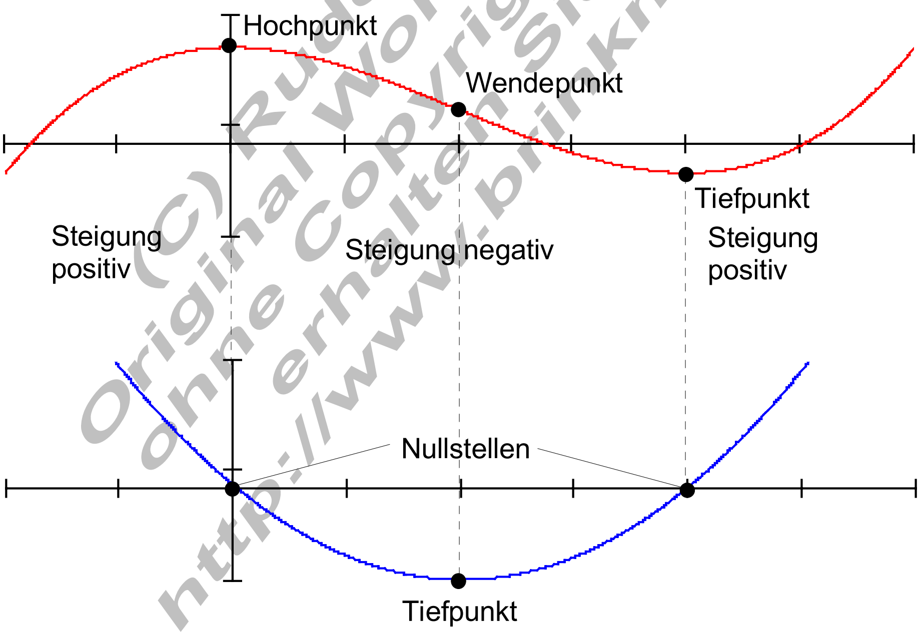
E4	Ergebnis
	Die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0 ist die Steigung der Tangente im Punkt P (x_0 | $f(x_0)$) und somit auch die Steigung des Graphen von f(x) in diesem Punkt.

E5	Ergebnis
	Die Ableitungsfunktion f'(x) heißt deshalb Steigungsfunktion, weil sie in jedem Punkt die Steigung von f(x) repräsentiert.

E6	Ergebnisse	
	a)	$f'(x) = 3 \qquad f''(x) = 0 \qquad f'''(x) = 0$
	b)	$f'(x) = 15x^2 - 3 \qquad f''(x) = 30x \qquad f'''(x) = 30$
	c)	$f'(x) = 9x^2 + 4x + 1 \qquad f''(x) = 18x + 4 \qquad f'''(x) = 18$
	d)	$f'(x) = 24x^2 + 24x + 6 \qquad f''(x) = 48x + 24 \qquad f'''(x) = 48$
	e)	$f'(x) = -4x^3 + 2 \qquad f''(x) = -12x^2 \qquad f'''(x) = -24x$
	f)	$f'(x) = 4x^3 - 9 \qquad f''(x) = 12x^2 \qquad f'''(x) = 24x$
	g)	$f'(x) = -3cx^2 - a - b - c^3 - 1 \qquad f''(x) = -6cx \qquad f'''(x) = -6c$
	h)	$f'(x) = 12x^2 - 4x + 5 \qquad f''(x) = 24x - 4 \qquad f'''(x) = 24$
	i)	$f'(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2 \qquad f''(x) = 60x^2 - 24x + 6 \qquad f'''(x) = 120x - 24$
	j)	$f'(x) = -4x^3 \qquad f''(x) = -12x^2 \qquad f'''(x) = -24x$

E7	Ergebnis
	$t(x) = -5x + 6 \qquad n(x) = \frac{1}{5}x - \frac{22}{5}$ Siehe ausführliche Lösung.

E8 Ergebnis



Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**	
	Parabel durch 3 Punkte	
	a)	Berechnen Sie die Funktionsgleichung f(x) der Parabel, die durch die Punkte $P_1(-4\,|\,-2)$ $P_2(-2\,|\,-4)$ $P_3(2\,|\,4)$ verläuft.
	b)	Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes.
	c)	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte von f(x).
	d)	Zeichnen Sie die Graphen von f(x) und f'(x) in ein Koordinatensystem.

A1 Ausführliche Lösung

a)

$P_1(-4\,|\,-2): f(-4) = 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = -2$

$P_2(-2\,|\,-4): f(-2) = 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = -4$

$P_2(2\,|\,4): f(2) = 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 4$

a_0	a_1	a_2	
1	−4	16	−2
1	−2	4	−4 II − I
1	2	4	4 III − I
1	−4	16	−2
0	2	−12	−2 | : 2
0	6	−12	6 | : (−6)
1	−4	16	−2
0	1	−6	−1
0	−1	2	−1 III + II
1	−4	16	−2
0	1	−6	−1
0	0	−4	−2

$-4a_2 = -2 \,|: (-4)$

$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{1}{2}}$

$a_1 - 6a_2 = -1 \Leftrightarrow a_1 - 6 \cdot \frac{1}{2} = -1$

$\Leftrightarrow a_1 - 3 = -1 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$

$a_0 - 4a_1 + 16a_2 = -2 \Leftrightarrow a_0 - 4 \cdot 2 + 16 \cdot \frac{1}{2} = -2$

$\Leftrightarrow a_0 - 8 + 8 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2}}$$

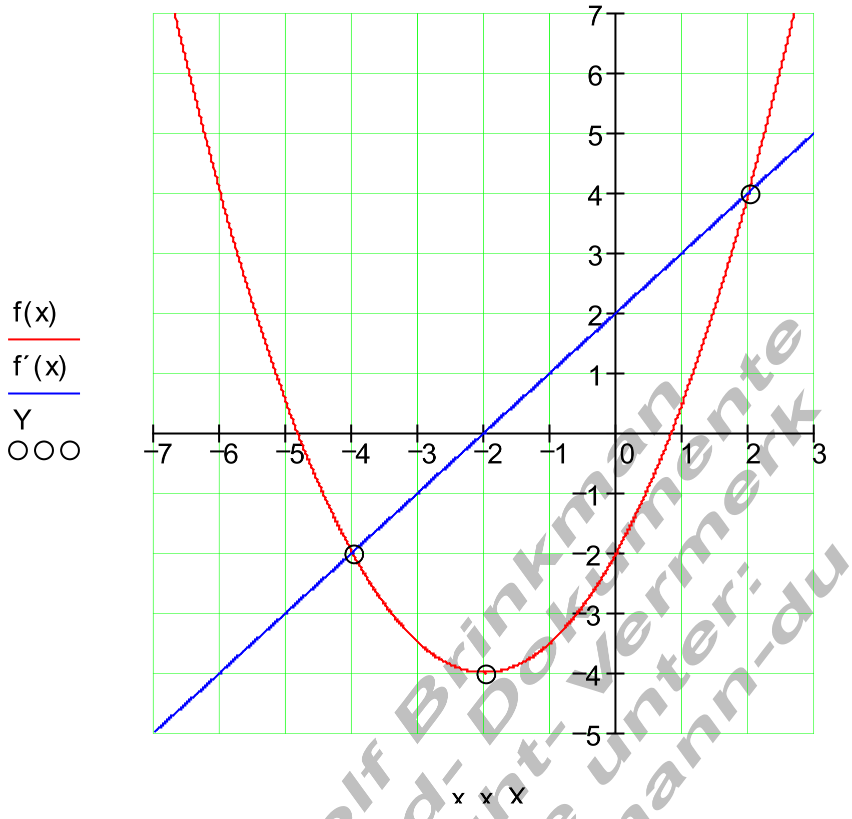
$P_1(-4\,|\,-2): f(-4) = \frac{1}{2} \cdot (-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 2 = 8 - 8 - 2 = -2$

$P_2(-2\,|\,-4): f(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 2 = 2 - 4 - 2 = -4$

$P_3(2\,|\,4): f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 2 = 2 + 4 - 2 = 4$

A1	Ausführliche Lösung	
	b)	Der Scheitelpunkt der Parabel ist ein Extrempunkt. $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-2 \quad \Rightarrow f'(x)=x+2 \quad \Rightarrow f''(x)=1$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ ist mögliche Extremstelle. $f''(x)=f''(-2)=1>0 \Rightarrow$ rel. Min bei $x=-2$ $f(-2)=\frac{1}{2}\cdot 4-4-2=2-4-2=-4$ rel. Min = Scheitelpunkt: $P_{Min}(-2\,\vert\,-4)=\underline{\underline{P_{Sp}(-2\,\vert\,-4)}}$

A1	Ausführliche Lösung	
	c)	$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-2 \qquad f(0)=-2 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,\vert\,-2)}}$ $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+2x-2=0$ $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+4x-4=0$ Normalform der quadratischen Gleichung $p=4;q=-4 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4+4=8 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{8}=2\cdot\sqrt{2}$ $x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ $x_1=-2+2\cdot\sqrt{2}\approx 0{,}83 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}\left(-2+2\cdot\sqrt{2}\approx 0{,}83\,\vert\,0\right)}}$ $x_2=-2-2\cdot\sqrt{2}\approx -4{,}83 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x2}\left(-2-2\cdot\sqrt{2}\approx -4{,}83\,\vert\,0\right)}}$

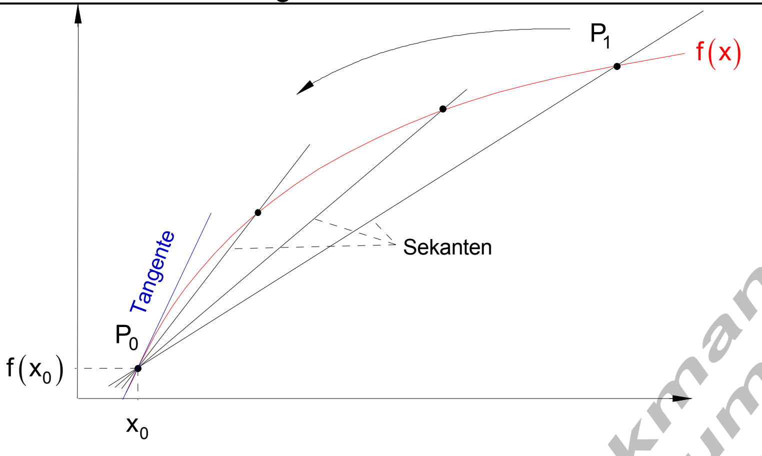
A1	Ausführliche Lösung
	d) 

A2	**Aufgabe**
	Was verstehen Sie unter der Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt?

A2	Ausführliche Lösung
	Bei einer linearen Funktion ist die Steigung in jedem Punkt des Graphen gleich. Sie lässt sich leicht über das Steigungsdreieck berechnen. Funktionen mit gekrümmten Grapen haben fast überall unterschiedliche Steigungen. Über das Steigungsdreieck lässt sich die mittlere Steigung, die Sekantensteigung bestimmen, repräsentiert durch den Differenzenquotienten. Erst die Grenzwertbildung führt von der Sekanten- zur Tangentensteigung. Deshalb ist die Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt gleich der Steigung der Tangente in diesem Punkt. Man nennt sie auch momentane Änderungsrate.

A3	**Aufgabe**
	Beschreiben Sie anschaulich (Skizze) und mit Worten, wie man bei einem Graphen von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung gelangt.

A3 Ausführliche Lösung



Verbindet man zwei Punkte eines gekrümmten Graphen durch eine Gerade, so bildet diese die Sekante. Die Sekante stellt die mittlere Steigung des Graphen zwischen diesen beiden Punkten dar. Man sagt dazu auch mittlere Änderungsrate. Will man näherungsweise die Steigung in einem Punkt bestimmen, so müssen die beiden Sekantenpunkte möglichst nahe zusammenliegen. Sie dürfen aber nicht aufeinanderliegen.
Bewegt man nun den Punkt P_1 immer weiter auf P_0 zu, so ändert sich die Sekantensteigung. Je mehr man sich dem Punkt P_0 nähert, desto mehr nähert sich die Sekantensteigung der Tangentensteigung. Erst der Grenzübergang liefert den genauen Wert der Tangentensteigung. Diese repräsentiert die momentane Änderungsrate.

A4	**Aufgabe**
	Welche Bedeutung hat die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0?

A4	Ausführliche Lösung
	Die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0 ist die Steigung der Tangente im Punkt P (x_0 | $f(x_0)$) und somit auch die Steigung des Graphen von f(x) in diesem Punkt. Man sagt dazu auch momentane Änderungsrate an der Stelle x_0.

A5	**Aufgabe**
	Warum nennt man die Ableitungsfunktion auch Steigungsfunktion?

A5	Ausführliche Lösung
	Die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0 ist die Steigung des Graphen von f(x) an dieser Stelle. Da eine stetige Funktion an fast jeder Stelle ableitbar ist, bilden die Ableitungswerte wiederum eine Funktion, die sogenannte Ableitungsfunktion f'(x). f'(x) heißt deshalb auch Steigungsfunktion, weil sie in jedem Punkt die Steigung von f(x) repräsentiert.

A6a	**Aufgabe**	
	Leiten Sie dreimal ab.	$f(x) = 3x + 4$

A6a	**Ausführliche Lösung**
	$f(x) = 3x + 4 \Rightarrow f'(x) = 3 \qquad f''(x) = 0 \qquad f'''(x) = 0$
	Die Ableitung einer Konstanten Funktion ist Null. Damit sind auch alle weiteren Ableitungen Null.

A6b	**Aufgabe**	
	Leiten Sie dreimal ab.	$f(x) = 2x - 4 + x^3 - 5x + 4x^3$

A6b	Ausführliche Lösung
	$f(x) = 2x - 4 + x^3 - 5x + 4x^3 = 5x^3 - 3x - 4$
	$\Rightarrow f'(x) = 15x^2 - 3 \qquad f''(x) = 30x \qquad f'''(x) = 30$
	Es ist sinnvoll vor dem Ableiten den Funktionsterm zu vereinfachen.

A6c	**Aufgabe**	
	Leiten Sie dreimal ab.	$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$

A6c	Ausführliche Lösung
	$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$
	$\Rightarrow f'(x) = 9x^2 + 4x + 1 \qquad f''(x) = 18x + 4 \qquad f'''(x) = 18$

A6d	**Aufgabe**	
	Leiten Sie dreimal ab.	$f(x) = (2x + 1)^3$

A6d	Ausführliche Lösung
	$f(x) = (2x + 1)^3$
	1. Lösung durch ausmultiplizieren:
	$f(x) = (2x + 1)^3 = (2x + 1)\underbrace{(2x + 1)^2}_{\text{1. bin. Formel}} = (2x + 1)\left(4x^2 + 4x + 1\right)$
	$= 8x^3 + 8x^2 + 2x + 4x^2 + 4x + 1 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
	$f'(x) = \underline{\underline{24x^2 + 24x + 6}} \qquad f''(x) = \underline{\underline{48x + 24}} \qquad f'''(x) = \underline{\underline{48}}$
	2. Lösung mit der Kettenregel:
	$f'(x) = 3(2x + 1)^2 \cdot 2 = 6(2x + 1)^2 = 6\left(4x^2 + 4x + 1\right) = \underline{\underline{24x^2 + 24x + 6}}$
	$f''(x) = 2 \cdot 6(2x + 1) \cdot 2 = 24(2x + 1) = \underline{\underline{48x + 24}}$
	$f'''(x) = \underline{\underline{48}}$

A6e	**Aufgabe**	
	Leiten Sie dreimal ab.	$f(x) = x - x^4 + 3 + x$

A6e	Ausführliche Lösung
	$f(x) = x - x^4 + 3 + x = -x^4 + 2x + 3$ $\Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 2 \qquad f''(x) = -12x^2 \qquad f'''(x) = -24x$ Es ist sinnvoll vor dem Ableiten den Funktionsterm zu vereinfachen.

A6f	**Aufgabe**	
	Leiten Sie dreimal ab.	$f(x) = 1 - 2x - 3x - 4x + x^4$

A6f	Ausführliche Lösung
	$f(x) = 1 - 2x - 3x - 4x + x^4 = x^4 - 9x + 1$ $\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 9 \qquad f''(x) = 12x^2 \qquad f'''(x) = 24x$ Es ist sinnvoll vor dem Ableiten den Funktionsterm zu vereinfachen.

A6g	**Aufgabe**	
	Leiten Sie dreimal ab.	$f(x) = a + b + c^2 - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$

A6g	Ausführliche Lösung
	$f(x) = \underbrace{a + b + c^2}_{\text{Konstante}} - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$ $f'(x) = -1 - a - b - 3cx^2 - c^3 = \underline{\underline{-3cx^2 \underbrace{- a - b - c^3 - 1}_{\text{Konstante}}}}$ $f''(x) = \underline{\underline{-6cx}} \qquad f'''(x) = \underline{\underline{-6c}}$

A6h	**Aufgabe**	
	Leiten Sie dreimal ab.	$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$

A6h	Ausführliche Lösung
	$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ $\Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 4x + 5 \qquad f''(x) = 24x - 4 \qquad f'''(x) = 24$

A6i	**Aufgabe**	
	Leiten Sie dreimal ab.	$f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$

A6i	Ausführliche Lösung
	$f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$ $\Rightarrow f'(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2$ $\Rightarrow f''(x) = 60x^2 - 24x + 6$ $\Rightarrow f'''(x) = 120x - 24$

A6j	**Aufgabe**	
	Leiten Sie dreimal ab.	$f(x)=\left(a^2+x^2\right)\left(a^2-x^2\right)$

A6j	Ausführliche Lösung
	$f(x)=\left(a^2+x^2\right)\left(a^2-x^2\right)$ 1. Lösung durch ausmultiplizieren (3. binomische Formel): $f(x)=a^4-x^4 \Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{-4x^3}} \Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{-12x^2}} \Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{-24x}}$ 2. Lösung mit der Produktregel (aufwendig): $f(x)=\underbrace{\left(a^2+x^2\right)}_{u}\underbrace{\left(a^2-x^2\right)}_{v} \Rightarrow u'=2x \quad v'=-2x$ $f'(x)=u'v+uv'=2x\cdot\left(a^2-x^2\right)+\left(a^2+x^2\right)(-2x)$ $=2a^2x-2x^3-2a^2x-2x^3=\underline{\underline{-4x^3}}$ $f''(x)=\underline{\underline{-12x^2}} \Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{-24x}}$

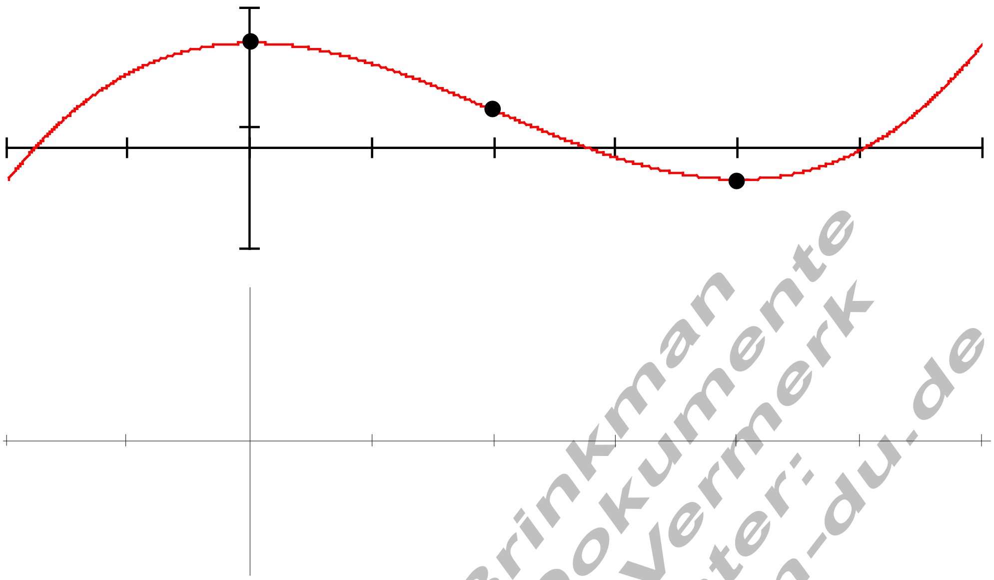
A7	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktion f(x). Die Gleichungen für Tangente und Normale sollen für den Punkt P (2 | f(2)) berechnet werden.	$f(x) = -x^2 - x + 2$

A7	Ausführliche Lösung
	$f(x) = -x^2 - x + 2 \Rightarrow f'(x) = -2x - 1$ Koordinaten des Punktes $P(2 \mid f(2))$: $f(2) = -2^2 - 2 + 2 = -4 - 2 + 2 = -4 \Rightarrow \underline{\underline{P(2 \mid -4)}}$ Steigung in $P(2 \mid -4)$: $f'(2) = -2 \cdot 2 - 1 = -5 \Rightarrow \underline{\underline{m_t = -5}}$ (Tangentensteigung) Tangentengleichung: $t(x) = m_t x + b_t = -5x + b_t$ Die Tangente verläuft durch den Punkt $P(2 \mid -4) \Rightarrow t(2) = -4 \Leftrightarrow -5 \cdot 2 + b_t = -4 \Leftrightarrow b_t = 6$ $\Rightarrow \underline{\underline{t(x) = -5x + 6}}$ ist die Gleichung der Tangente durch $P(2 \mid -4)$ Normalengleichung: $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5} \Rightarrow n(x) = \frac{1}{5}x + b_n$ Die Normale verläuft durch den Punkt $P(2 \mid -4) \Rightarrow n(2) = -4 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \cdot 2 + b_n = -4 \Leftrightarrow b_n = -\frac{22}{5}$ $\Rightarrow \underline{\underline{n(x) = \frac{1}{5}x - \frac{22}{5}}}$ ist die Gleichung der Normalen durch $P(2 \mid -4)$

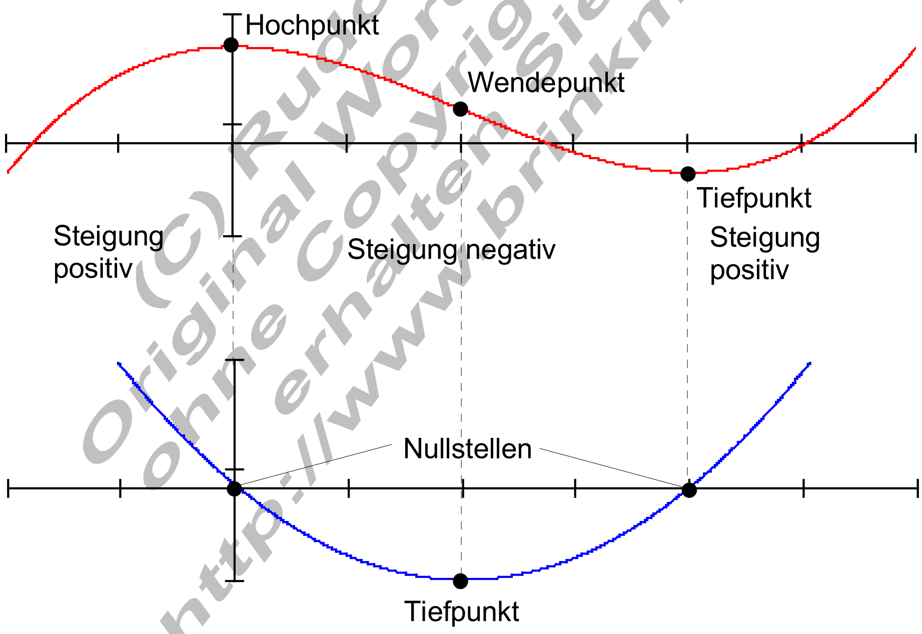
A7	Ausführliche Lösung
	Alternativlösung mittels Formel: Tangente und Normale an den Graphen von f(x) durch die Punkte P(x_0 | $f(x_0)$) Gleichung der Tangente $t(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Steigung}}(x - x_0) + f(x_0)$ Gleichung der Normalen $n(x) = \underbrace{-\frac{1}{f'(x_0)}}_{\text{Steigung}}(x - x_0) + f(x_0);\ f'(x_0) \neq 0$ $f(x) = -x^2 - x + 2 \Rightarrow f'(x) = -2x - 1 \qquad x_0 = 2$ $f'(x_0) = f'(2) = -4 - 1 = -5$ $f(x_0) = f(2) = -4 - 2 + 2 = -4$ $t(x) = -5(x - 2) - 4 = -5x + 10 - 4 = \underline{\underline{-5x + 6}}$ $n(x) = \frac{1}{5}(x - 2) - 4 = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5} - \frac{20}{5} = \underline{\underline{\frac{1}{5}x - \frac{22}{5}}}$

A8 Aufgabe

Skizzieren Sie unterhalb des Funktionsgraphen den Graphen der Ableitungsfunktion und markieren Sie in beiden Graphen die charakteristischen Punkte.



A8 Ausführliche Lösung



Markante Punkte des Graphen von f(x) sind Hochpunkt, Tiefpunkt und der Wendepunkt. Dort, wo f(x) den Hoch- bzw. Tiefpunkt hat, ist der Wert der Ableitungsfunktion Null, da sich an dieser Stelle von f(x) waagerechte Tangenten befinden. Waagerechte Tangente an f(x) bedeutet Steigung von f(x) an diesen Stellen Null. Die Steigung im Wendepunkt ist negativ aber maximal im Intervall zwischen den Extrempunkten. Deshalb hat dort die Ableitungsfunktion ihren Tiefpunkt. Die Funktionswerte der Ableitungsfunktion sind zwischen ihren Nullstellen negativ, außerhalb dieser positiv. Das entspricht genau der Steigung von f(x).