Anwendungen der Differenzialrechnung I

Anwendungen in der Betriebswirtschaft.

Die Kostenfunktion $K(x)$ stellt den Zusammenhang zwischen der Produktionsmenge x und den Gesamtkosten dar.
Erhöht man die Produktion um Δx, so erhöhen sich auch die Kosten um ΔK.
Der Differenzenquotient $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ beschreibt die durchschnittliche Kostenzunahme bei einer Produktionsänderung von Δx (mittlere Änderungsrate)
Die momentane Änderungsrate an der Stelle x_0 nennt man Differentialkosten.
Sie werden durch den Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ bestimmt, d.h. der Ableitung der Kostenfunktion K.

Definition:

Die Ableitung der Kostenfunktion K(x) bezeichnet man als Differentialkosten K'(x) oder auch als Grenzkosten K'(x).

Beispiel:

	Gegeben ist die Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$
a)	Bestimmen Sie die Differentialkosten, erstellen Sie eine Wertetabelle für K(x) und für K'(x) und zeichnen Sie beide Graphen in ein Koordinatensystem. Wertetabelle für I = [0 ; 6] mit der Schrittweite 1
b)	Bestimmen Sie den geringsten Kostenzuwachs.

zu a)

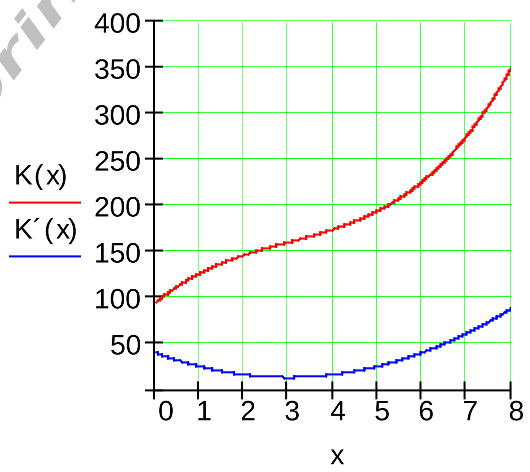
$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$

Differentialkosten:

$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$

Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6
$K(x)$	94	126	146	160	174	194	226
$K'(x)$	40	25	16	13	16	25	40



zu b)

Der geringste Kostenzuwachs liegt im Scheitel der Parabel K'(x), also dort, wo die Tangente an K'(x) waagerecht ist.

$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$

Bedingung für waagerechte Tangente an $K'(x)$:

$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$

Das gleiche Ergebnis hätten wir auch aus der Tabelle für K'(x) ablesen können.
Das Ergebnis bedeutet:
Der geringste Kostenzuwachs entsteht bei einer Ausbringungsmenge von x = 3, dort beträgt er 13 GE / ME.

Anwendungen aus den Naturwissenschaften.

In der Mathematik betrachtet man meistens Funktionen in Abhängigkeit von der Variablen x.
In den Naturwissenschaften werden oft Funktionen in Abhängigkeit von der Zeit t behandelt.

Beispiel:

Das Weg – Zeit Gesetz für einen gleichmäßig beschleunigten Gegenstand mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 4\,\frac{m}{s}$ und der Beschleunigung $a = 1{,}8\,\frac{m}{s^2}$ lautet:

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t}$$

Für die oben angegebenen Werte von v_0 und a gilt somit:

$$s(t) = 0{,}9\frac{m}{s^2}\cdot t^2 + 4\frac{m}{s}\cdot t$$

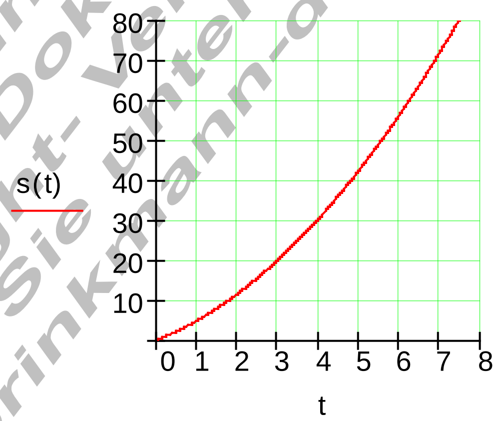
Die mittlere Geschwindigkeit ist $\frac{\Delta s}{\Delta t}$

Die momentane Geschwindigkeit ist:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v(t)$$

$$v(t) = s'(t) = 1{,}8\frac{m}{s^2}\cdot t + 4\frac{m}{s}$$

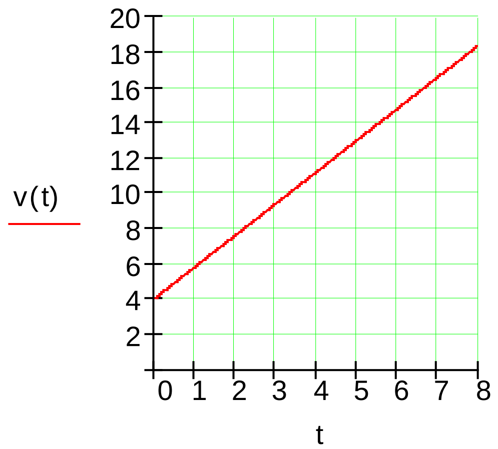
Weg – Zeit Diagramm



Im v – t Diagramm erhält man eine Gerade, d.h. die Geschwindigkeit nimmt gleichmäßig zu.

Die hier konstante Steigung $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ist die Beschleunigung $a = 1{,}8\,\frac{m}{s^2}$

Geschwindigkeits – Zeit Diagramm



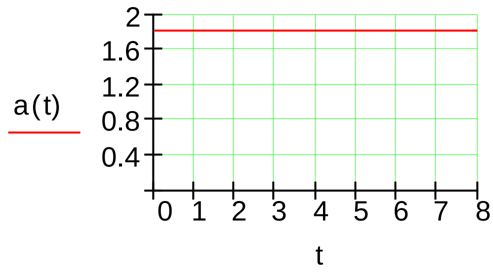
Für die Beschleunigung gilt:

$$v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$

$$v(t) = 1{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot t + 4\,\frac{m}{s}$$

$$a = v'(t) = 1{,}8\,\frac{m}{s^2}$$

Beschleunigungs – Zeit Diagramm



Merke:

Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung gilt:

$\boxed{s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t}$ $\boxed{v(t) = s'(t) = at + v_0}$ $\boxed{a(t) = v'(t) = a}$

Für die Geschwindigkeit v ist die Ableitung des Weges nach der Zeit: $v(t) = s'(t)$.

Für $s'(t)$ schreibt man auch $\dot{s}(t)$.