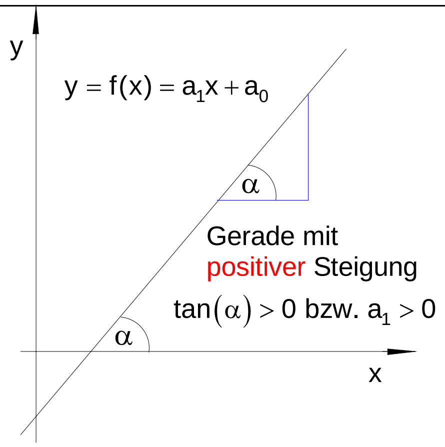
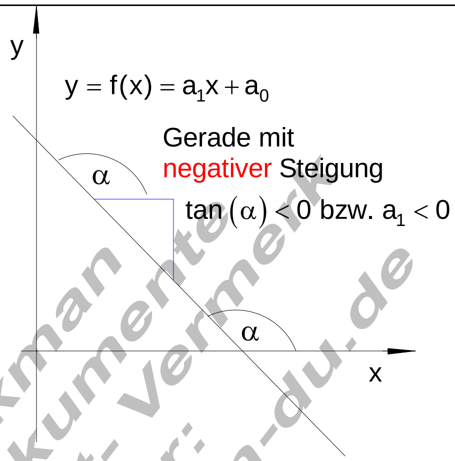
Monotonie und Monotonieverhalten von Funktionen

Die lineare Funktion $f(x) = a_1x + a_0$ ist die einfachste Funktion, deren Graph keinerlei Krümmung aufweist. Verantwortlich dafür ist der konstante Anstieg $a_1 = \tan(\alpha)$, wobei α der Winkel zwischen der Geraden und der positiv gerichteten x – Achse ist.

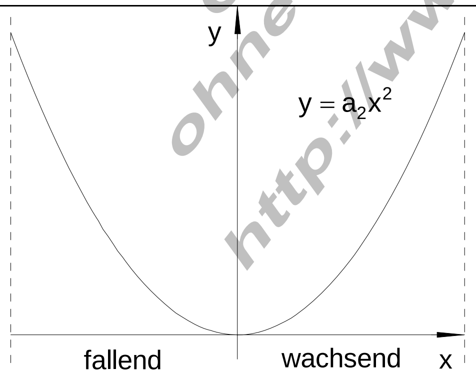




Ist $0^0 < \alpha < 90^0$ oder $0 < a_1 < \infty$ d.h. α bzw. $a_1 > 0$, so steigt die Gerade an. Das bedutet, dass mit wachsendem x auch der Funktionswert $f(x)$ größer wird.	Ist $90^0 < \alpha < 180^0$ oder $-\infty < a_1 < 0$ d.h. α bzw. $a_1 < 0$, so fällt die Gerade. Das bedutet, dass mit wachsendem x der Funktionswert $f(x)$ kleiner wird.

In beiden Fällen spricht man von einer ***monotonen Funktion***, und zwar von einer ***monoton wachsenden Funktion***, wenn $a_1 > 0$ ist, und von einer ***monoton fallenden Funktion***, wenn $a_1 < 0$ ist.

Der Begriff Monotonie lässt sich auch auf Funktionen übertragen, deren Kurvenverlauf gekrümmt ist, wenn man bedenkt, dass man i. allg. in jedem Kurvenpunkt eine Tangente an den Graphen legen kann.



Für die Funktion $f(x) = a_2x^2$
gilt demnach:
Auf dem Intervall $I_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$
ist $f(x)$ <u>monoton fallend</u>
Auf dem Intervall $I_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$
ist $f(x)$ <u>monoton wachsend</u>

Der Anstieg des Graphen ist jetzt zwar nicht mehr konstant, wie dies bei der Geraden der Fall war, sondern er ändert sich von Kurvenpunkt zu Kurvenpunkt.
Aber der Zusammenhang

Anstieg der Tangente > 0	$\rightarrow$	Kurve monoton wachsend
Anstieg der Tangente < 0	$\rightarrow$	Kurve monoton fallend

bleibt erhalten.

Bekanntlich liefert die erste Ableitung der Funktion f (x) die Steigungsfunktion f' (x).
Damit lässt sich der ***Monotoniesatz*** wie folgt formulieren:

Die Funktion $f(x)$ sei im Intervall I differenzierbar.

1. Wenn $f(x)$ im Intervall I monoton wachsend ist, dann gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$
   Wenn $f(x)$ im Intervall I monoton fallend ist, dann gilt $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$

2. Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ ist, dann ist $f(x)$ monoton wachsend im Intervall I
   Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ ist, dann ist $f(x)$ monoton fallend im Intervall I

3. Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$ ist, dann ist $f(x)$ streng monoton wachsend im Intervall I
   Wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$ ist, dann ist $f(x)$ streng monoton fallend im Intervall I

<u>Bestimmung der Monotoniebereiche</u>

Beispiel:

Aus dem Funktionsgraphen lassen sich häufig die Monotoniebereiche mehr oder weniger genau ablesen.

$f(x)$ ist streng monoton wachsend

für $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_{\mathbb{R}}$

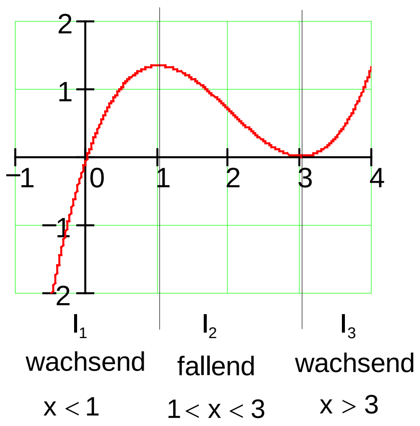
$f(x)$ ist streng monoton fallend

für $I_2 = \{1 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$

$f(x)$ ist streng monoton wachsend

für $I_3 = \{3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$

$$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$



Mit Hilfe der ersten Ableitung lassen sich die Monotoniebereiche berechnen.

Es gilt: $f'(x) > 0 \Rightarrow$ streng monoton wachsend

$f'(x) < 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

Zu lösen ist die Ungleichung $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$

1. Schritt: Nullstellen von $f'(x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 3$$

2. Schritt: Zerlegung von $f'(x)$ in Linearfaktoren

$$f'(x) = (x-1)(x-3)$$

3. Schritt: Vorzeichentabelle

Ein Produkt aus zwei Faktoren ist dann positiv, wenn beide Faktoren gleiches Vorzeichen besitzen.
Ein Produkt aus zwei Faktoren ist dann negativ, wenn beide Faktoren ungleiches Vorzeichen besitzen.

	$x = 1$	$x = 3$	
Bereich	$x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$x - 1$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$ ist streng monoton	wachsend	fallend	wachsend

Beispiel:

Folgende Monotoniebereiche lassen sich aus dem Graphen ablesen:

$f(x)$ ist streng monoton wachsend

für $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$

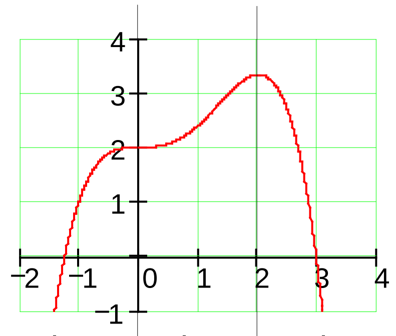
$f(x)$ ist streng monoton wachsend

für $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$

$f(x)$ ist streng monoton fallend

für $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$

$$f(x) := \frac{-1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2$$



I_1	I_2	I_3
wachsend	wachsend	fallend
$x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$

Berechnung:

Es gilt: $f'(x) > 0 \Rightarrow$ streng monoton wachsend

$f'(x) < 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend

$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + 2x^2$

Zu lösen ist die Ungleichung $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$

1. Schritt: Nullstellen von $f'(x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(-x+2) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0\,;\, x_3 = 2$$

2. Schritt: Zerlegung von $f'(x)$ in Linearfaktoren

$$f'(x) = x^2(-x+2)$$

3. Schritt: Vorzeichentabelle

$x = 0$ $x = 2$

Bereich	$x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
x^2	+	+	+
$-x+2$	+	+	−
$f'(x)$	+	+	−
$f(x)$ ist streng monoton	wachsend	wachsend	fallend

An der Stelle $x = 0$ ändert $f(x)$ nicht das Monotonieverhalten.