Kurvendiskussion

Vorbetrachtungen

Um den Graphen einer Funktion zeichnen und interpretieren zu können, ist es erforderlich einiges über markante Punkte des Graphen und über seinen Verlauf im Definitionsbereich zu wissen.
Derartige Untersuchungen von Funktionen auf ihre wichtigsten charakteristischen Eigenschaften nennt man Kurvendiskussion.
Bei solchen Untersuchungen sollte man stets systematisch vorgehen und auch immer die gleiche Reihenfolge der Berechnungen und Betrachtungen einhalten, damit man keine wichtigen Eigenheiten der Funktion übersieht.

Folgende Verfahrensweise hat sich sehr bewährt:

1.	***Definitionsbereich:*** Man bestimmt den Definitionsbereich der Funktion, denn nur innerhalb dieses Bereiches ist es sinnvoll, Untersuchungen über die Eigenschaften der Funktion anzustellen.
2.	***Symmetrien:*** Man stellt fest, ob die Funktion achsen – oder punktsymmetrisch ist. bei Achsensymmetrie gilt: $f(-x)=f(x)$ In beiden Fällen braucht die Funktion bei Punktsymmetrie gilt: $f(-x)=-f(x)$ nur noch für $x \geq 0$ untersucht zu werden. Speziell bei ***ganzrationalen Funktionen*** gilt: Eine ganzrationale Funktion ist genau dann achsensymmetrisch, wenn ihr Term nur Summanden mit geraden Exponenten enthält. Eine ganzrationale Funktion ist genau dann punktsymmetrisch, wenn ihr Term nur Summanden mit ungeraden Exponenten enthält.
3.	***Extrema:*** Bestimmen der relativen Extrema, man nennt sie auch Hoch- bzw. Tiefpunkte. Das sind auch die Punkte mit waagerechter Tangente. Hochpunkt = relatives Maximum hinreichende Bedingung: $f'(x_1)=0 \quad \wedge \quad f''(x_1)<0$ Tiefpunkt = relatives Minimum hinreichende Bedingung: $f'(x_1)=0 \quad \wedge \quad f''(x_1)>0$
4.	***Wendepunkte:*** Bestimmen der Wendepunkte, bzw. der Sattelpunkte. hinreichende Bedingung für Wendepunkte $f''(x_W)=0 \quad \wedge \quad f'''(x_W)\neq 0$ Der Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente.
5.	***Achsenschnittpunkte:*** Wird der x- Wert Null (x = 0) in die Funktionsgleichung von f(x) eingesetzt, erhält man den Schnittpunkt mit der y- Achse. Schnittpunkt(e) mit der x- Achse erhält man durch nullsetzen des Funktionsterms von f(x). Schnittpunkt mit der y – Achse $P_y(0 \mid y_s) \Rightarrow f(0)$ bestimmen Schnittpunkte mit der x – Achse (Nullstellen) $P_{xi}(x_i \mid 0) \Rightarrow f(x)=0$
6.	***Der Graph:*** Mit allen bisher gesammelten Informationen lässt sich in den meisten Fällen nun der Graph zeichnen. Dazu wird zunächst eine Wertetabelle angelegt. Dabei zeigt es sich, welche Werte noch zu berechnen sind. Diese kann man entweder mit dem Taschenrechner bestimmen, oder für ganzzahlige

x- Werte mit dem HORNER-Schema.

7. ***Krümmungsverhalten und Monotonie:***

In der Wendestelle x_W ändert sich die Krümmung des Graphen von $f(x)$
Für die Krümmung in einem beliebigen Punkt x_0 gilt:
$f''(x_0) > 0$ bedeutet der Graph von $f(x)$ ist linksgekrümmt (konvex)
$f''(x_0) < 0$ bedeutet der Graph von $f(x)$ ist rechtsgekrümmt (konkav)

Monotonie:

1. Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ ist, dann ist $f(x)$ monoton wachsend im Intervall I
   Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ ist, dann ist $f(x)$ monoton fallend im Intervall I

2. Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$ ist, dann ist $f(x)$ streng monoton wachsend im Intervall I
   Wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$ ist, dann ist $f(x)$ streng monoton fallend im Intervall I

Kurz:
An den Wendestellen ändert sich das Krümmungsverhalten eines Graphen.
Das Monotonieverhalten ändert sich an den Extremstellen.

8. ***Randpunkte des Definitionsbereiches:***

Untersuchung der Funktion in den Randpunkten des Definitionsbereichs.
Wenn der Definitionsbereich nicht beschränkt ist, dann sind die beiden Grenzwerte
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$
zu bestimmen.
Anders ausgedrückt:
Man betrachtet den Verlauf der Funktionswerte für große x- Werte in sowohl positiver als auch negativer Richtung und fragt sich, wohin gehen die Funktionswerte.

Beispiel einer ausführlichen Kurvendiskussion

1. ***Definitionsmenge:***

Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow$ Definitionsmenge: $\underline{\underline{D_f = \mathbb{R}}}$
Die Funktion ist für alle reellen Zahlen definiert. Normalerweise gilt das immer für ganzrationale Funktionen. Es sei denn, man möchte die Definitionsmenge einschränken.

2. ***Symmetrien:***

Da alle Exponenten gerade sind, liegt eine Achsensymmetrie vor,
Es gilt also: $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
Der Vorteil bei vorliegen einer Achsensymmetrie besteht darin, dass Funktionswerte nur für positive x- Werte berechnet werden müssen. Für die entsprechend negativen x- Werte sind sie identisch.

3. ***Extrema:***

Vorgehensweise zur Berechnung der Extrempunkte.
Man bildet die ersten beiden Ableitungen der Funktion f(x).
Nullsetzen der 1. Ableitung liefert die Stellen mit waagerechter Tangente.
Setzt man diese Werte in die 2. Ableitung ein, so erhält man eine Aussage über die Art des vorliegenden Extremums.
(Relatives Maximum oder relatives Minimum, bzw. kein Extrempunkt).
Die Werte der Extremstellen x_i eingesetzt in die Funktionsgleichung ergeben die Extremwerte und damit sind die Koordinaten der Extrempunkte bekannt.

Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$

Die Ableitungen: $f'(x) = x^3 - 4x \quad f''(x) = 3x^2 - 4 \quad f'''(x) = 6x$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen:

$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \mid x \text{ ausklammern}$

$\Leftrightarrow x\left(x^2 - 4\right) = 0 \mid \text{Satz vom Nullprodukt} \Rightarrow x_1 = 0 \text{ bzw. } x^2 - 4 = 0$

$x^2 - 4 = 0 \mid +4$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 \mid \sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow |x| = 2 \Rightarrow x_2 = 2 \text{ bzw. } x_3 = -2$

Stellen mit waagerechter Tangente: $\boxed{x_1 = 0}$; $\boxed{x_2 = 2}$; $\boxed{x_3 = -2}$

Nachweis für relatives Maximum bzw. relatives Minimum:

$f''(x_1) = f''(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. für } x_1 = \boxed{x_{E1} = 0 \ (\text{Hochpunkt})}$

$f''(x_2) = f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. für } x_2 = \boxed{x_{E2} = 2 \ (\text{Tiefpunkt})}$

$f''(x_3) = f''(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. für } x_3 = \boxed{x_{E3} = -2 \ (\text{Tiefpunkt})}$

Die Extrempunkte:

Hochpunkt für $x_{E1} = 0$:

$f(0) = -\frac{9}{4} = -2{,}25$

$\Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(0 \mid -\frac{9}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Max}(0 \mid -2{,}25)}$

Tiefpunkt für $x_{E2} = 2$:

$f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 - \frac{9}{4} = -\frac{25}{4} = -6{,}25$

$\Rightarrow \boxed{P_{Min1}\left(2 \mid -\frac{25}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Min1}(2 \mid -6{,}25)}$

Tiefpunkt für $x_{E2} = -2$:

$f(-2) = f(2) = -\frac{25}{4} = -6{,}25 \text{ wegen Achsensymmetrie}$

$\Rightarrow \boxed{P_{Min2}\left(-2 \mid -\frac{25}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Min2}(-2 \mid -6{,}25)}$

4.	***Wendepunkte:*** Vorgehensweise zur Berechnung der Wendepunkte: Zusätzlich zu den ersten beiden Ableitungen von f(x) bildet man noch die dritte. Die Nullstellen der zweiten Ableitung sind mögliche Wendestellen. Zur Überprüfung ob ein Wendepunkt vorliegt, werden die errechneten Nullstellen der zweiten Ableitung in die dritte Ableitung eingesetzt. Ist das Ergebnis ungleich Null, so bezeichnet der entsprechende x- Wert eine Wendestelle. Den dazugehörigen Funktionswert erhält man durch Einsetzen der x- Werte in den Term der Funktionsgleichung f(x).

Funktionsgleichung: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2-\frac{9}{4}$

Die Ableitungen: $f'(x)=x^3-4x \qquad f''(x)=3x^2-4 \qquad f'''(x)=6x$

Hinreichende Bedingung für Wendestellen:

$f''(x)=0 \wedge f'''(x)\neq 0$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-4=0\,|+4$$

$$\Leftrightarrow 3x^2=4\,|:3$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3}\,|\sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow |x|=\sqrt{\frac{4}{3}} \Rightarrow x_1=\sqrt{\frac{4}{3}} \text{ bzw. } x_2=-\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Mögliche Wendestellen: $\boxed{x_{W1}=\sqrt{\frac{4}{3}}}\,;\,\boxed{x_{W2}=-\sqrt{\frac{4}{3}}}$

Nachweis auf Wendestellen:

$$f'''(x_{W1})=f'''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=6\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\neq 0\,;\,f'''(x_{W2})=f'''\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=6\cdot\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)\neq 0$$

Wendepunkt für $x_{W1}=\sqrt{\frac{4}{3}}$

$$f(x_{W1})=f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^4-2\cdot\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2-\frac{9}{4}=-\frac{161}{36}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{W1}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\,|-\frac{161}{36}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(1{,}15\,|-4{,}47)}$$

Wendepunkt für $x_{W2}=-\sqrt{\frac{4}{3}}$

$$f(x_{W2})=f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=-\frac{161}{36} \text{ wegen Achsensymmetrie}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\,|-\frac{161}{36}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(-1{,}15\,|-4{,}47)}$$

5. ***Achsenschnittpunkte:***

a) Schnittpunkt mit der y – Achse : $f(0) = -\frac{9}{4} = -2,25 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid -2,25)}$

b) Schnittpunkt mit der x – Achse (Nullstellen) :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} = 0 \mid \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \mid \text{Substitution } x^2 = z$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 8z - 9 = 0 \text{ quadratische Gleichung in z}$$

$$\Rightarrow p = -8 \,;\, q = -9 \,;\, D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{8}{2}\right)^2 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -\left(-\frac{8}{2}\right) \pm \sqrt{25} = 4 \pm 5 \Rightarrow z_1 = 9 \,;\, z_2 = -1 < 0 \text{ (keine Lösung)}$$

Rücksubstitution: $z_1 = x^2 = 9 \Rightarrow |x| = \sqrt{9} \Rightarrow x_1 = 3 \,;\, x_2 = -3$

Nullstellen bei: $\boxed{P_{x1}(3 \mid 0)}$; $\boxed{P_{x2}(-3 \mid 0)}$

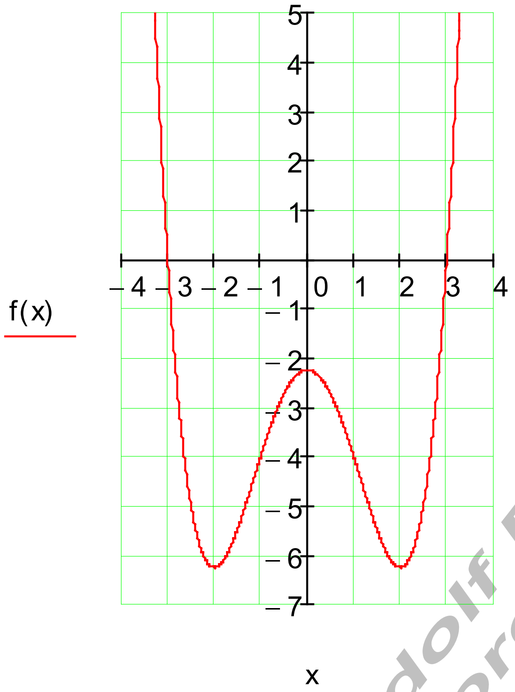
6. Wertetabelle mit Zusatzwerten:

$$f(1) = \frac{1}{4} \cdot 1^4 - 2 \cdot 1^2 - \frac{9}{4} = -4 \,;\, f(-1) = f(1) = -4$$

$$f(3,25) = \frac{1}{4} \cdot (3,25)^4 - 2 \cdot (3,25)^2 - \frac{9}{4} \approx 4,52 \,;\, f(-3,25) = f(3,25) \approx 4,52$$

		P_{x2}	P_{Min2}	P_{W2}		$P_{Max} = P_y$		P_{W1}	P_{Min1}	P_{x1}	
x	–3,25	–3	–2	–1,15	–1	0	1	1,15	2	3	3,25
f(x)	4,52	0	–6,25	–4,47	–4	–2,25	–4	–4,47	–6,25	0	4,52

Der Graph



Zusammenfassung:

Achsensymmetrie

Extrempunkte:

$P_{Min1}(2\,|\,-6{,}25)\,;\,P_{Min2}(-2\,|\,-6{,}25)$

$P_{Max}(0\,|\,-2{,}25)$

Wendepunkte:

$P_{W1}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\,\middle|\,-\frac{161}{36}\right);\,P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\,\middle|\,-\frac{161}{36}\right)$

Achsenschnittpunkte:

$P_y(0\,|\,-2{,}25)\,;\,P_{x1}(3\,|\,0)\,;\,P_{x2}(-3\,|\,0)$

Krümmung, Monotonie:

konvex: $\left]-\infty\,;-\sqrt{\frac{4}{3}}\right[$ und $\left]\sqrt{\frac{4}{3}}\,;\infty\right[$

konkav: $\left]-\sqrt{\frac{4}{3}}\,;\sqrt{\frac{4}{3}}\right[$

streng monoton fallend:

$]-\infty\,;-2[$ und $]0\,;2[$

streng monoton wachsend:

$]-2\,;0[$ und $]2\,;\infty[$

Randpunkte:

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$

7. ***Krümmungsverhalten und Monotonie:***

Krümmung für $x_0 = -2$ $\left(\text{links von } P_{W2}\right)$:

$$f''(-2) = 3\cdot(-2)^2 - 4 = 8 > 0 \quad \boxed{\text{linkskrümmung (konvex) für } \left]-\infty\,;-\sqrt{\frac{4}{3}}\right[}$$

Krümmung für $x_0 = 0$ $\left(\text{zwischen } P_{W1} \text{ und } P_{W2}\right)$:

$$f''(0) = -4 < 0 \quad \boxed{\text{rechtskrümmung (konkav) für } \left]-\sqrt{\frac{4}{3}}\,;\sqrt{\frac{4}{3}}\right[}$$

Krümmung für $x_0 = 2$ $\left(\text{rechts von } P_{W2}\right)$:

$$f''(2) = 3\cdot 2^2 - 4 = 8 > 0 \quad \boxed{\text{linkskrümmung (konvex) für } \left]\sqrt{\frac{4}{3}}\,;\infty\right[}$$

streng monoton fallend für $\left]-\infty\,;-2\right[$

streng monoton wachsend für $\left]-2\,;0\right[$

streng monoton fallend für $\left]0\,;2\right[$

streng monoton wachsend für $\left]2\,;\infty\right[$

8. ***Randpunkte des Definitionsbereiches:***

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}\right) = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{x^2} - \frac{9}{4x^4}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{x^2} - \frac{9}{4x^4}\right)}_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to-\infty} x^4 = \infty\\
&\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to\infty} x^4 = \infty
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty}$$