Beispiel 1 zur Kurvendiskussion

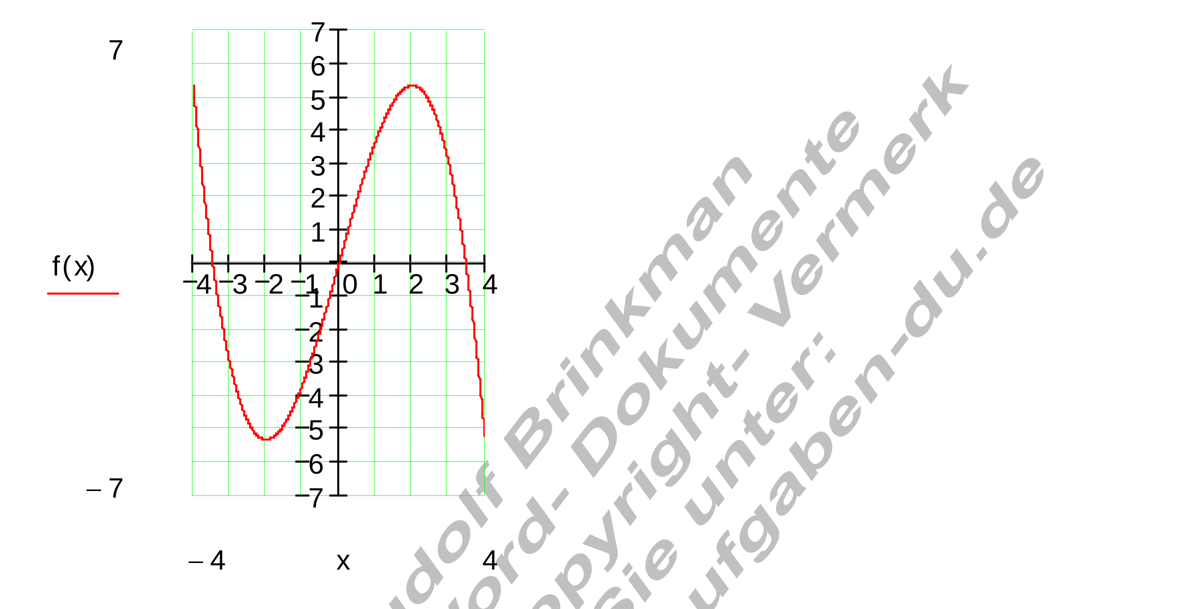
Beispiele in Kurzform:

Beispiel 1:

1.	***Definitionsbereich:*** $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x \qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$
2.	***Symmetrien:*** Punktsymmetrie: $f(-x) = -f(x)$ da nur ungerade Exponenten
3.	***Extrema:*** Ableitungen: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 4 \Rightarrow f''(x) = -2x \Rightarrow f'''(x) = -2$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ bzw. $x_2 = -2$ $f''(x_1) = f''(2) = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_1 = 2$ $f''(x_2) = f''(-2) = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_2 = -2$ $f(x_1) = f(2) = \frac{16}{3} \Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(2 \mid \frac{16}{3}\right)}$ $f(x_2) = f(-2) = -\frac{16}{3} \Rightarrow \boxed{P_{Min}\left(-2 \mid -\frac{16}{3}\right)}$
4.	***Wendepunkte:*** $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Rightarrow x_W = 0$ $f'''(x_W) = f'''(0) = -2 \neq 0$ $f(x_W) = f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_W(0 \mid 0)}$
5.	***Achsenschnittpunkte:*** $f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid 0)}$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{3}x^2 + 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $-\frac{1}{3}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{12}$ bzw. $x_3 = -\sqrt{12}$ Nullstellen: $\boxed{P_{x1}(0 \mid 0)}$; $\boxed{P_{x2}\left(\sqrt{12} \mid 0\right)}$; $\boxed{P_{x3}\left(-\sqrt{12} \mid 0\right)}$
6.	***Der Graph:***

$f(-4) = 5{,}3\,;\; f(4) = -5{,}3\,;\; f(-3) = -3\,;\; f(3) = 3\,;\; f(-1) = -3{,}7\,;\; f(1) = 3{,}7$

		P_{x3}		P_{Min}		P_y P_W P_{x1}		P_{Max}		P_{x2}	
x	-4	$-\sqrt{12}$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\sqrt{12}$	4
$f(x)$	$5{,}3$	0	-3	$-5{,}\overline{3}$	$-3{,}7$	0	$3{,}7$	$5{,}\overline{3}$	3	0	$-5{,}3$



7. ***Krümmungsverhalten und Monotonie:***

Krümmung:

für $x_0 = -2$ (links von P_W) $f''(-2) > 0 \Rightarrow \boxed{\text{Linkskrümmung (konvex)} \;\;]-\infty\,;0[}$

für $x_0 = 2$ (rechts von P_W) $f''(2) < 0 \Rightarrow \boxed{\text{Rechtskrümmung (konkav)} \;\;]0\,;\infty[}$

Monotonie:

streng monoton fallend für $]-\infty\,;-2[$

streng monoton wachsend für $]-2\,;2[$

streng monoton fallend für $]2\,;\infty[$

8. ***Randpunkte des Definitionsbereiches:***

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{x^2}\right)}_{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to-\infty} x^3 = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to\infty} x^3 = -\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty\end{array}}$$