Beispiel 2 zur Kurvendiskussion

Beispiele in Kurzform:

Beispiel 2:

1.	***Definitionsbereich:*** $f(x)=\frac{1}{16}x^3-\frac{3}{8}x^2+2$ $\boxed{D=\mathbb{R}}$
2.	***Symmetrien:*** keine Symmetrie
3.	***Extrema:*** Ableitungen: $f(x)=f(x)=\frac{1}{16}x^3-\frac{3}{8}x^2+2 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{16}x^2-\frac{3}{4}x \Rightarrow f''(x)=\frac{3}{8}x-\frac{3}{4} \Rightarrow f'''(x)=\frac{3}{8}$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{16}x^2-\frac{3}{4}x=0 \Leftrightarrow x\left(\frac{3}{16}x-\frac{3}{4}\right)=0 \Rightarrow x_1=0$ $\frac{3}{16}x-\frac{3}{4}=0 \Rightarrow x_2=4$ $f''(x_1)=f''(0)=-\frac{3}{4}<0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_1=0$ $f''(x_2)=f''(4)=\frac{3}{4}>0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_2=4$ $f(x_1)=f(0)=2 \Rightarrow \boxed{P_{Max}(0\,\vert\,2)}$ $f(x_2)=f(4)=0 \Rightarrow \boxed{P_{Min}(4\,\vert\,0)}$
4.	***Wendepunkte:*** $f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x-\frac{3}{4}=0 \Rightarrow x_W=2$ $f'''(x_W)=f'''(2)=\frac{3}{8}\neq 0$ $f(x_W)=f(2)=1 \Rightarrow \boxed{P_W(2\,\vert\,1)}$
5.	***Achsenschnittpunkte:***

$f(0)=2 \Rightarrow \boxed{P_y(0\,|\,2)}$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{16}x^3-\frac{3}{8}x^2+2=0$

$f(4)=0$ siehe Berechnung von P_{Min} bedeutet 1. Nullstelle $x_1=4$

HORNER

$$\begin{array}{c|cccc} & \frac{1}{16} & -\frac{3}{8} & 0 & 2 \\ x=4 & & \frac{4}{16} & -\frac{1}{2} & -2 \\ \hline & \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \Rightarrow \frac{1}{16}x^2-\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}=0$$

$\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow x_2=4\,;\,x_3=-2$

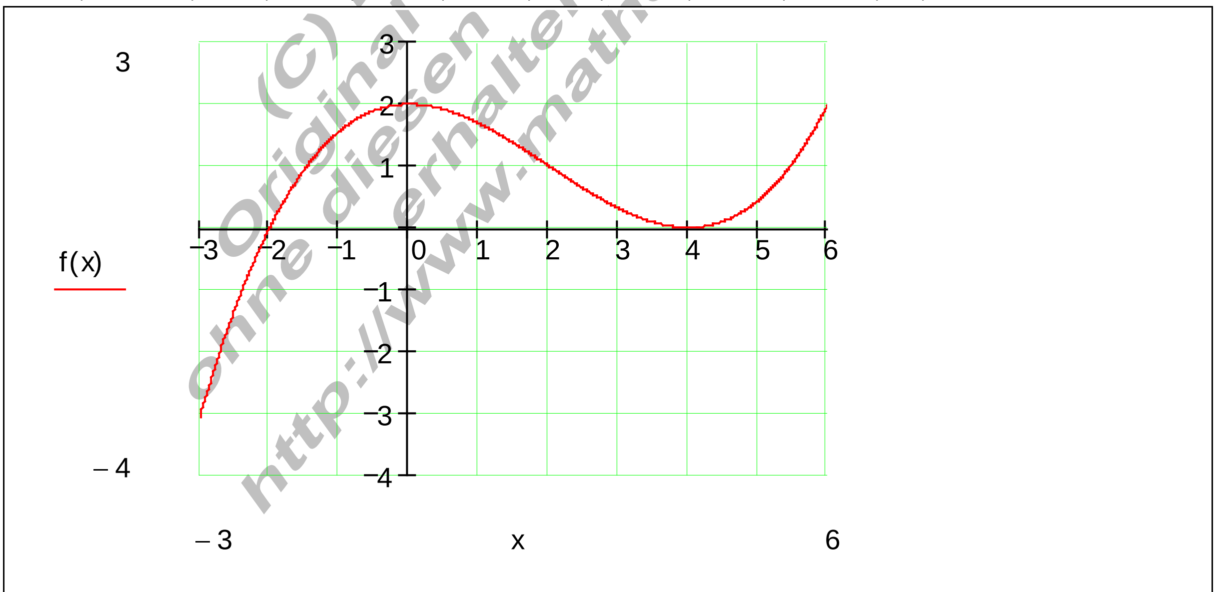
Nullstellen: $\boxed{P_{x1/2}(4\,|\,0)}$; $\boxed{P_{x3}(-2\,|\,0)}$

6. ***Der Graph:***

Wertetabelle :

$f(-3)\approx-3{,}06\,;\,f(-1)\approx1{,}56\,;\,f(1)\approx1{,}67\,;\,f(3)\approx0{,}31\,;\,f(5)\approx0{,}44\,;\,f(6)=2$

		P_{x3}		P_{Max}		P_W		P_{Min} $P_{x1/2}$		
x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	−3,06	0	1,56	2	1,67	1	0,31	0	0,44	2



7. ***Krümmungsverhalten und Monotonie:***

	Krümmung: für $x_0 = 0$ (links von P_W) $f''(0) = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow \boxed{\text{Rechtskrümmung (konkav) }]-\infty\,;2[}$ für $x_0 = 4$ (rechts von P_W) $f''(4) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \boxed{\text{Linkskrümmung (konvex) }]2\,;\infty[}$ Monotonie: streng monoton wachsend für $]-\infty\,;0[$ streng monoton fallend für $]0\,;4[$ streng monoton wachsend für $]4\,;\infty[$
8.	***Randpunkte des Definitionsbereiches:*** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{1}{16} - \frac{3}{8x} + \frac{2}{x^3}\right)$ $= \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 \cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{16} - \frac{3}{8x} + \frac{2}{x^3}\right)}_{\frac{1}{16}} = \frac{1}{16}\cdot \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{16}\cdot \lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$ $\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty\end{array}}$