Beispiel 3 zur Kurvendiskussion

Beispiele in Kurzform:

Beispiel 3:

1. ***Definitionsbereich:***

$$f(x) = -\frac{1}{2}x(x+3)^3 = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - \frac{27}{2}x \qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

2. ***Symmetrien:***

keine Symmetrie

3. ***Extrema:***

Ableitung über Produktregel:

$$f(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}x}_{u}\underbrace{(x+3)^3}_{v} \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = -\frac{1}{2}x\,;\, v = (x+3)^3\,;\, u' = -\frac{1}{2}\,;\, v' = 3(x+3)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x)} = -\frac{1}{2}(x+3)^3 - \frac{3}{2}x(x+3)^2 = \boxed{-\frac{1}{2}(x+3)^2(4x+3)}$$

$$f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}(x+3)^2}_{u}\underbrace{(4x+3)}_{v} \Rightarrow f''(x) = u'v + uv'$$

$$u = -\frac{1}{2}(x+3)^2\,;\, v = 4x+3\,;\, u' = -(x+3)\,;\, v' = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{f''(x)} = -(x+3)(4x+3) - \frac{1}{2}(x+3)^2 \cdot 4 = \boxed{-3(x+3)(2x+3)}$$

$$f''(x) = \underbrace{-3(x+3)}_{u}\underbrace{(2x+3)}_{v} \Rightarrow f'''(x) = u'v + uv'$$

$$u = -3(x+3)\,;\, v = 2x+3\,;\, u' = -3\,;\, v' = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{f'''(x)} = -3(2x+3) - 3(x+3) \cdot 2 = \boxed{-(12x+27)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x+3)^2(4x+3) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -3\,;\, x_3 = -\frac{3}{4}$$

$f''(x_{1/2}) = f''(-3) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage über Extremstellen

$$f''(x_3) = f''\left(-\frac{3}{4}\right) = -3\left(-\frac{3}{4}+3\right)\left(2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+3\right) = -\frac{81}{8} = -10{,}125 < 0$$

$\Rightarrow$ rel. Max. für $x_3 = -\frac{3}{4}$

$x_{1/2} = -3$ ist doppelte Nullstelle von $f'(x)$, d.h. kein Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$ an der Stelle $x = -3$. Das bedeutet, $x_{1/2} = -3$ ist keine Extremstelle.

$$f(x_3) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}+3\right)^3 = \frac{2187}{512} \approx 4{,}27$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(-\frac{3}{4} \,|\, \frac{2187}{512}\right) \text{ bzw. } P_{Max}(-0{,}75 \,|\, 4{,}27)}$$

4. ***Wendepunkte:***

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow -3(x+3)(2x+3)=0 \Rightarrow x_1=-3\,;\,x_2=-\frac{3}{2}$$

$$f'''(x_1)=f'''(-3)=-(12\cdot(-3)+27)\neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W1}=-3$$

$$f'''(x_2)=f'''\left(-\frac{3}{2}\right)=-\left(12\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+27\right)\neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W2}=-\frac{3}{2}$$

$$f(x_{W1})=f(-3)=-\frac{1}{2}\cdot(-3)(-3+3)^3=0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{W1}(-3\,|\,0)}$$

$$f(x_{W2})=f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}+3\right)^3=\frac{81}{32}\approx 2{,}53$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{W2}\left(-\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{81}{32}\right) \text{ bzw. } P_{W2}(-1{,}5\,|\,2{,}53)}$$

5. ***Achsenschnittpunkte:***

$$f(0)=0 \Rightarrow \boxed{P_y(0\,|\,0)}$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x(x+3)^3=0 \Rightarrow x_1=0\,;\,x_{2/3/4}=-3$$

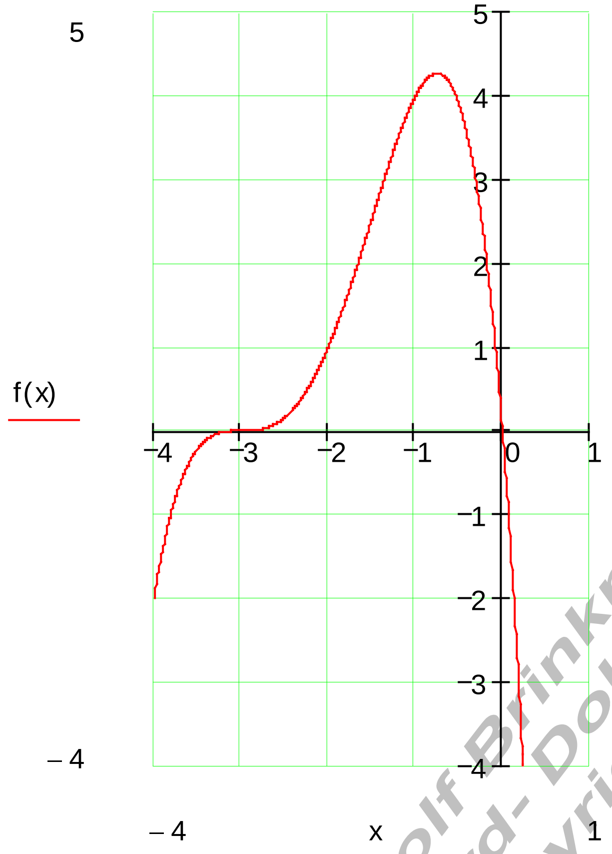
Nullstellen: $\boxed{P_{x1}(0\,|\,0)}$; $\boxed{P_{x2/3/4}(-3\,|\,0)}$

6. ***Der Graph:***

Wertetabelle :

$$f(-4)=-2\,;\,f(-2)=1;\,f(-1)=4\,;\,f(0{,}5)\approx-10{,}72$$

		P_{W1} $P_{x2/3/4}$		P_{W2}		P_{Max}	P_{x1}	
x	–4	–3	–2	–1,5	–1	–0,75	0	0,5
f(x)	–2	0	1	2,53	4	4,27	0	–10,72



7. ***Krümmungsverhalten und Monotonie:***

Krümmung:

für $x_0 = -4$ (links von P_{W1}) $f''(-4) = -5 < 0$

$\Rightarrow \boxed{\text{Rechtskrümmung (konkav) } \left]-\infty\,;-3\right[}$

für $x_0 = -2$ (rechts von P_{W1}) $f''(-2) = 1 > 0$

$\Rightarrow \boxed{\text{Linkskrümmung (konvex) } \left]-3\,;-1{,}5\right[}$

für $x_0 = -1$ (rechts von P_{W2}) $f''(-1) = -2 < 0$

$\Rightarrow \boxed{\text{Rechtskrümmung (konkav) } \left]-1{,}5\,;\infty\right[}$

Monotonie:

streng monoton wachsend für $\left]-\infty\,;-3\right[$

streng monoton wachsend für $\left]-3\,;-\frac{3}{4}\right[$

streng monoton fallend für $\left]-\frac{3}{4}\,;\infty\right[$

8. ***Randpunkte des Definitionsbereiches:***

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - \frac{27}{2}x\right) \\ = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4\left(-\frac{1}{2} - \frac{9}{2x} - \frac{27}{2x^2} - \frac{27}{2x^3}\right) \\ = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2} - \frac{9}{2x} - \frac{27}{2x^2} - \frac{27}{2x^3}\right)}_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to\infty} x^4 = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty}$$