Beispiel 4 zur Kurvendiskussion

<u>Beispiele in Kurzform:</u>

Beispiel 4:

1.	***Definitionsbereich:*** $f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}$ $\qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$
2.	***Symmetrien:*** <u>Achsensymmetrie:</u> $f(-x) = f(x)$ da nur gerade Exponenten
3.	***Extrema:*** Ableitungen: $f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 9x \Rightarrow f''(x) = -12x^2 + 9 \Rightarrow f'''(x) = -24x$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 9x = 0 \Leftrightarrow x\left(-4x^2 + 9\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $-4x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\frac{3}{2}$ $f''(x_1) = f''(0) = 9 > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_1 = 0$ $f''(x_2) = f''\left(\frac{3}{2}\right) = -18 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_2 = \frac{3}{2}$ $f''(x_3) = f''\left(-\frac{3}{2}\right) = -18 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_3 = -\frac{3}{2}$ $f(x_1) = f(0) = -\frac{81}{16} \approx -5{,}06 \Rightarrow \boxed{P_{Min}\left(0 \mid -\frac{81}{16}\right) \text{ bzw. } P_{Min}(0 \mid -5{,}06)}$ $f(x_2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Max1}\left(\frac{3}{2} \mid 0\right) \text{ bzw. } P_{Max1}(1{,}5 \mid 0)}$ $f(x_3) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Max2}\left(-\frac{3}{2} \mid 0\right) \text{ bzw. } P_{Max2}(-1{,}5 \mid 0)}$
4.	***Wendepunkte:*** $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -12x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$ $f'''(x_1) = f'''\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -24 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W1} = \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0{,}87$ $f'''(x_2) = f'''\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -24 \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W2} = -\sqrt{\frac{3}{4}} \approx -0{,}87$ $f(x_{W1}) = f\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -\frac{9}{4} = -2{,}25 \Rightarrow \boxed{P_{W1}\left(\sqrt{\frac{3}{4}} \mid -\frac{9}{4}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(0{,}87 \mid -2{,}25)}$ $f(x_{W2}) = f\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -\frac{9}{4} = -2{,}25 \Rightarrow \boxed{P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{3}{4}} \mid -\frac{9}{4}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(-0{,}87 \mid -2{,}25)}$

5. ***Achsenschnittpunkte:***

$f(0) = -\frac{81}{16} \approx -5{,}06 \Rightarrow \boxed{P_y\left(0 \mid -\frac{81}{16}\right) \text{ bzw. } P_y(0 \mid -5{,}06)}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} = 0$

Bisher bekannte Nullstellen: $x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = -\frac{3}{2}$ (siehe Extrempunkte)

Polynomdivision: $\left(-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}\right) : \underbrace{\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)}_{x^2 - \frac{9}{4}}$

$$\left(-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}\right) : \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = -x^2 + \frac{9}{4}$$

$$\underline{-\left(-x^4 + \frac{9}{4}x^2\right)}$$

$$\frac{9}{4}x^2 - \frac{81}{16}$$

$$\underline{-\left(\frac{9}{4}x^2 - \frac{81}{16}\right)}$$

$-x^2 + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4}$

$\Rightarrow x_{3/4} = \pm\frac{3}{2}$

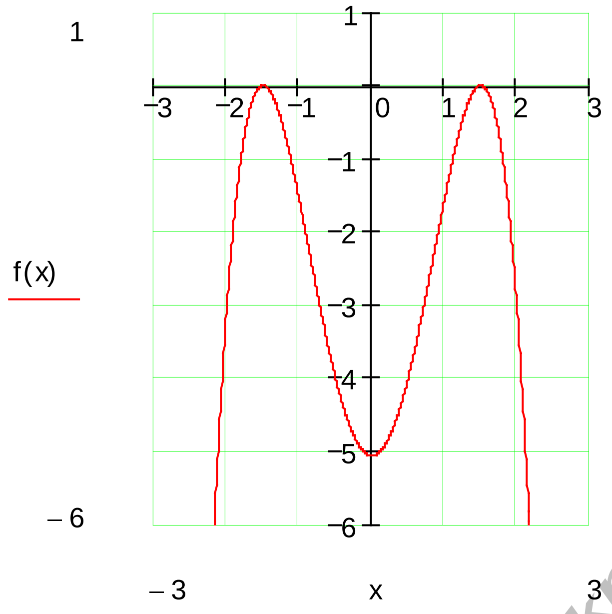
Nullstellen: $\boxed{P_{x1/2}\left(\frac{3}{2} \mid 0\right)}$; $\boxed{P_{x3/4}\left(-\frac{3}{2} \mid 0\right)}$

6. ***Der Graph:***

Wertetabelle:

$f(-2) \approx -3{,}06 = f(2)$; $f(-1) \approx -1{,}56 = f(1)$

		P_{Max2} $P_{x3/4}$		P_{W2}	P_{Min} P_y	P_{W1}		P_{Max1} $P_{x1/2}$	
x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}87$	0	$0{,}87$	1	$1{,}5$	2
$f(x)$	$-3{,}06$	0	$-1{,}56$	$-2{,}25$	$-5{,}06$	$-2{,}25$	$-1{,}56$	0	$-3{,}06$



7. *Krümmungsverhalten und Monotonie:*

Krümmung:

für $x_0 = -1$ (links von P_{W2}) $f''(-1) = -3 < 0$

$\Rightarrow \boxed{\text{Rechtskrümmung (konkav)} \; \left]-\infty ; -\sqrt{\frac{3}{4}}\right[}$

für $x_0 = 0$ (zwischen P_{W1} und P_{W2}) $f''(0) = 9 > 0$

$\Rightarrow \boxed{\text{Linkskrümmung (konvex)} \; \left]-\sqrt{\frac{3}{4}} ; \sqrt{\frac{3}{4}}\right[}$

für $x_0 = 1$ (rechts von P_{W1}) $f''(1) = -3 < 0$

$\Rightarrow \boxed{\text{Rechtskrümmung (konkav)} \; \left]\sqrt{\frac{3}{4}} ; \infty\right[}$

Monotonie:

streng monoton wachsend für $]-\infty ; -1{,}5[$

streng monoton fallend für $]-1{,}5 ; 0[$

streng monoton wachsend für $]0 ; 1{,}5[$

streng monoton fallend für $]1{,}5 ; \infty[$

8. *Randpunkte des Definitionsbereiches:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}\right) = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(-1 + \frac{9}{2x^2} - \frac{81}{16x^4}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(-1 + \frac{9}{2x^2} - \frac{81}{16x^4}\right)}_{-1} = -1 \cdot \lim_{x\to-\infty} x^4 = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -1 \cdot \lim_{x\to\infty} x^4 = -\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty}$$