Beispiel 5 zur Kurvendiskussion

Beispiele in Kurzform:

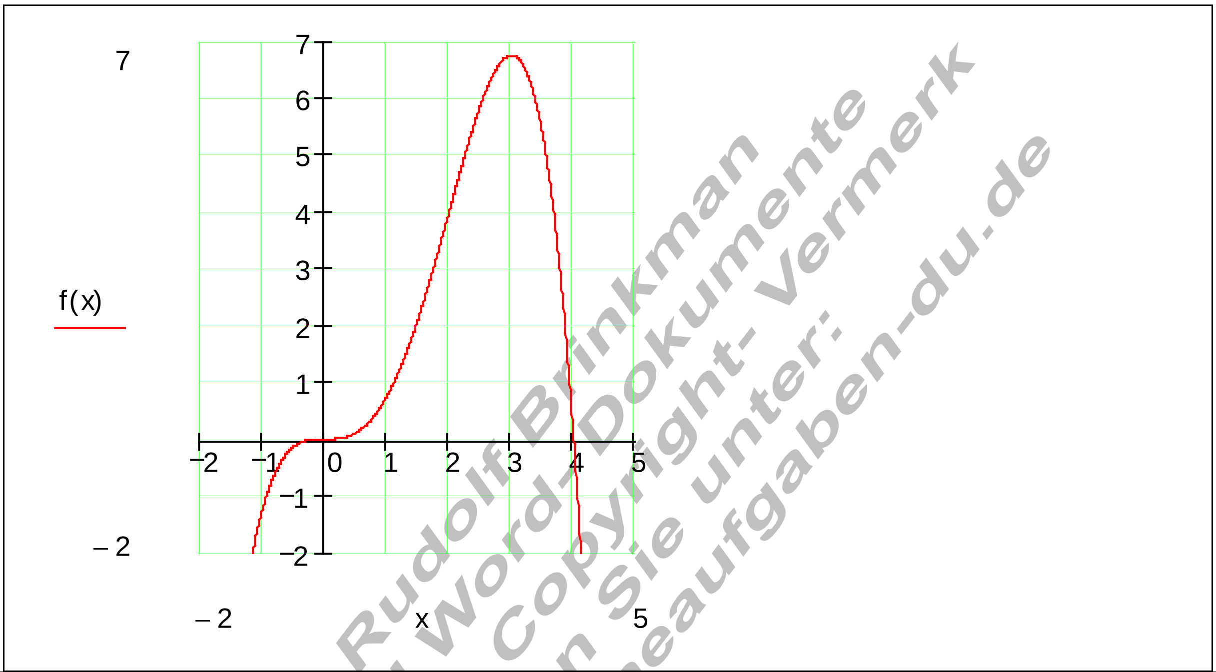
Beispiel 5:

1.	***Definitionsbereich:*** $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$ $\boxed{D = \mathbb{R}}$
2.	***Symmetrien:*** keine Symmetrie
3.	***Extrema:*** Ableitungen: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + 3x^2 \Rightarrow f''(x) = -3x^2 + 6x \Rightarrow f'''(x) = -6x + 6$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(-x+3) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 ; x_3 = 3$ $f''(x_1) = f''(0) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage über Extremstelle bei $x_1 = 0$ da aber $x_{1/2} = 0$ doppelte Nullstelle von $f'(x)$ ist, erfolgt für $f'(x)$ an der Stelle $x_{1/2} = 0$ kein Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ bei $x_1 = 0$ gibt es keine Extremstelle $f''(x_3) = f''(3) = -9 < 0 \Rightarrow$ rel Max für $x_3 = 3$ $f(x_3) = f(3) = \frac{27}{4} = 6{,}75 \Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(3 \mid \frac{27}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Max}(3 \mid 6{,}75)}$
4.	***Wendepunkte:*** $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-3x+6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 : x_2 = 2$ $f'''(x_1) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_{W1} = 0$ $f'''(x_2) = f'''(2) = -6 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_{W2} = 2$ $f(x_{W1}) = f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{W1}(0 \mid 0)}$ $f(x_{W2}) = f(2) = 4 \Rightarrow \boxed{P_{W2}(2 \mid 4)}$
5.	***Achsenschnittpunkte:*** $f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid 0)}$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3\left(-\frac{1}{4}x + 1\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0 ; x_4 = 4$ Nullstellen: $\boxed{P_{x1/2/3}(0 \mid 0)}$; $\boxed{P_{x4}(4 \mid 0)}$
6.	***Der Graph:***

Wertetabelle:

$f(-1) = -1{,}25\ ;\ f(1) = 0{,}75\ ;\ f(4{,}2) = -3{,}7$

		P_{W1} $P_{x1/2/3}$ P_y		P_{W2}	P_{Max}	P_{x4}	
x	–1	0	1	2	3	4	4,2
f(x)	–1,25	0	0,75	4	6,75	0	–3,7



7. ***Krümmungsverhalten und Monotonie:***

Krümmung:

für $x_0 = -1$ (links von P_{W1}) $f''(-1) = -9 < 0 \Rightarrow \boxed{\text{Rechtskrümmung (konkav)}\ ]-\infty\,;-0\,[}$

für $x_0 = 1$ (zwischen P_{W1} und P_{W2}) $f''(1) = 3 > 0 \Rightarrow \boxed{\text{Linkskrümmung (konvex)}\ ]\,0\,;2\,[}$

für $x_0 = 3$ (rechts von P_{W2}) $f''(3) = -9 < 0 \Rightarrow \boxed{\text{Rechtskrümmung (konkav)}\ ]\,2\,;\infty\,[}$

Monotonie:

streng monoton wachsend für $]-\infty\,;0\,[$

streng monoton wachsend für $]\,0\,;3\,[$

streng monoton fallend für $]\,3\,;\infty\,[$

8. ***Randpunkte des Definitionsbereiches:***

	$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{4}x^4+x^3\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{x}\right) \\ = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{x}\right)}_{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}\cdot\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{4}\cdot\lim\limits_{x\to\infty} x^4 = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty}$$