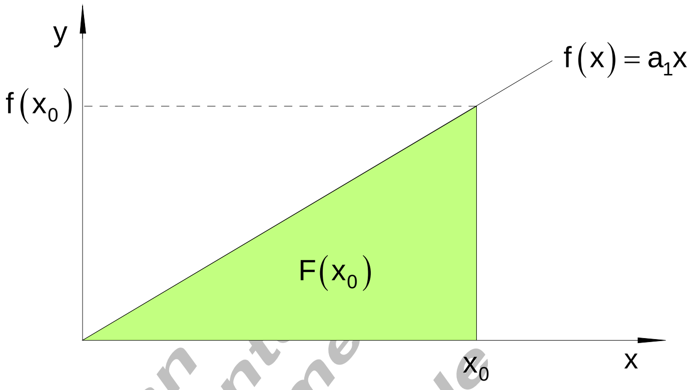
Vorbetrachtungen zur Flächenfunktion

Der Graph der Funktion $f(x) = a_1x$ stellt im kartesischen Koordinatensystem eine Gerade durch den Ursprung da.
Gesucht ist eine Funktion, die den Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x – Achse in Abhängigkeit von x_0 beschreibt.
Da es sich bei der abgebildeten Fläche um ein Dreieck handelt, ist die Lösung über die Flächenformel des Dreiecks $A = \frac{g \cdot h}{2}$ leicht zu finden.
Für unser Problem ändern wir die Variablen wiie folgt:

$A \to F(x_0)\,;\, g \to x_0\,;\, h \to f(x_0) = a_1x_0$



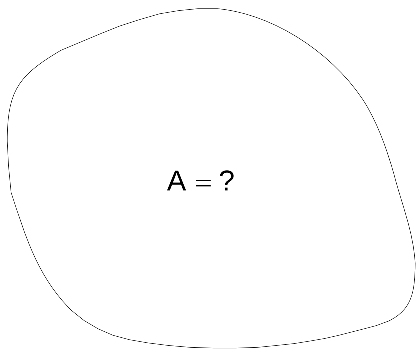
$F(x_0) = \frac{x_0 \cdot f(x_0)}{2}$ mit $f(x_0) = a_1x_0$ wird:

$F(x_0) = \frac{x_0 \cdot a_1x_0}{2} = \frac{a_1}{2}x_0^2$

Die Funktion $F(x_0)$ beschreibt die Fläche zwischen dem Graphen und der x – Achse in Abhängigkeit von x_0.
Wir nennen sie ***Flächenfunktion***.

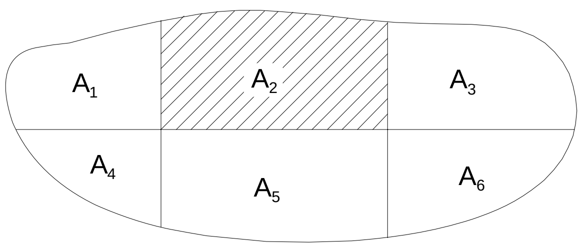
Das Flächenproblem

Schon den alten griechischen Mathematikern war das grundlegende Prinzip zur Bestimmung krummlinig begrenzter Flächen bekannt.

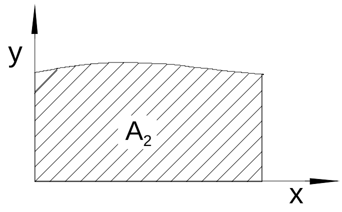


Die Differentialrechnung, mit der wir uns schon beschäftigten, wurde erst weitaus später (Ende 17. Jh.) von den Naturwissenschaftlern Leibnitz und Newton entwickelt.

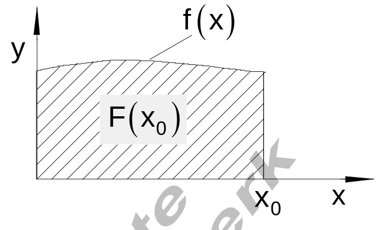
Jede krummlinig begrenzte Fläche lässt sich in endlich viele Flächen zerlegen, in denen nur eine krummlinige Begrenzung auftritt.
Alle anderen Begrenzungen sind dann geradlinig.



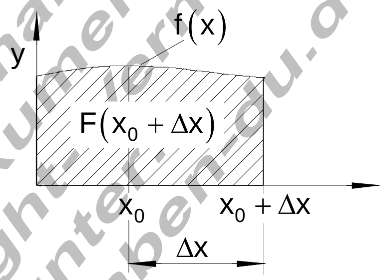
Die einzelnen Teilflächen (z.B. hier A_2) können im Kartesischen Koordinatensystem als Fläche zwischen der krummlinigen Begrenzung und der Abszissenachse dargestellt werden.



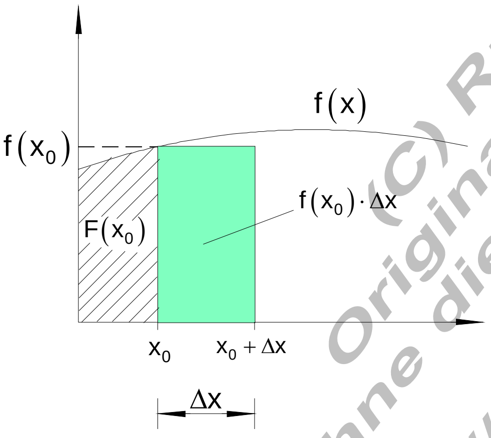
Ist die krummlinige Begrenzung der Graph einer stetigen Funktion f (x), so stellt sich die Frage, ob eine Funktion F existiert, die jedem Abszissenwert x_0 die Fläche $F(x_0)$ zuordnet, wie das im gezeigten Einführungsbeispiel der Fall war.

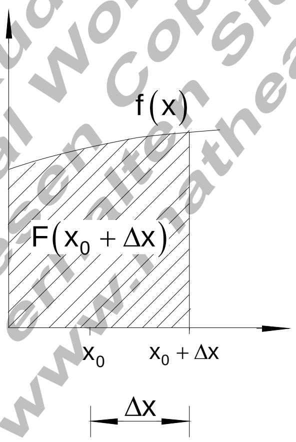


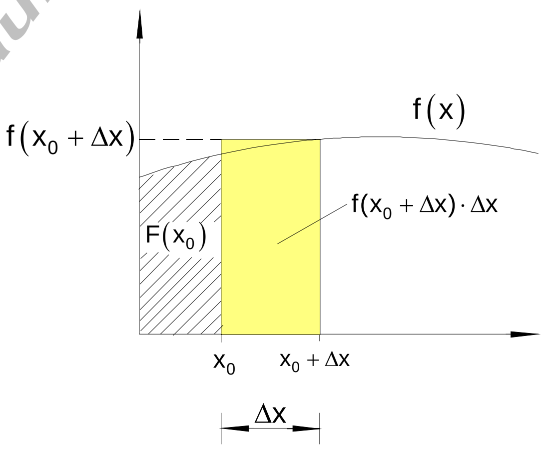
Wenn eine solche Funktion F existiert, und die Fläche $F(x_0)$ dem Abszissenwert x_0 zugeordnet ist, so muss auch dem Abszissenwert $(x_0 + \Delta x)$ eine Fläche $F(x_0 + \Delta x)$ zugeordnet werden können.



<u>Flächeneinschachtelung</u>







Die gekennzeichnete Fläche unter der Kurve ist etwas kleiner als die tatsächliche.

$F(x_0 + \Delta x)$ ist die tatsächliche Fläche

Die gekennzeichnete Fläche unter der Kurve ist etwas größer als die tatsächliche.

Je kleiner der Flächenstreifen gemacht wird, desto geringer wird die Abweichung von der tatsächlichen Fläche.

Dieser Zusammenhang lässt sich mathematisch so formulieren:

$F(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta x$ $\qquad$ $F(x_0 + \Delta x)$ $\qquad$ $F(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x$

Das führt zu folgender Ungleichung:

$$\begin{array}{rcccl} F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x & \le & F(x_0+\Delta x) & \le & F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |-F(x_0) \\ \Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x & \le & F(x_0+\Delta x)-F(x_0) & \le & f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |:\Delta x \\ \Leftrightarrow f(x_0) & \le & \dfrac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} & \le & f(x_0+\Delta x) \end{array}$$

Grenzwertbildung

$$\begin{array}{ccccc} \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0) & \le & \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} & \le & \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) \\ f(x_0) & \le & F'(x_0) & \le & f(x_0) \\ f(x_0) & = & F'(x_0) & = & f(x_0) \end{array}$$

also $\underline{\underline{F'(x_0)=f(x_0)}}$

Das bedeutet, die Ableitung der Flächenfunktion $F(x)$ an der Stelle x_0 ist gleich dem Funktionswert $f(x_0)$ an der Stelle x_0 der krummlinigen Begrenzung.

Wie schreiben: $F'(x_0)=\dfrac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0)$ oder allgemein:

$$\boxed{F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)}$$

Wenn es also gelingt, eine Funktion $F(x)$ zu finden, deren Ableitung die Funktion $f(x)$ der Begrenzungskurve ist, dann ist $F(x)$ die Flächenfunktion.

Wenn wir eine Funktion ***ableiten***, nennen wir das ***differenzieren***.
Eine Flächenfunktion zu finden ist offenbar die Umkehrung dieses Vorgangs.
Man könnte formal sagen:
Eine Flächenfunktion zu finden, bedeutet ***aufleiten*** oder ***integrieren***.

Am Beispiel einer einfachen Potenzfunktion soll nun intuitiv ein Weg gefunden werden, wie man diese aufleitet, bzw. integriert.

Potenzfunktion: $f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3\cdot x^{3-1}=3x^2$

Ableiten bedeutet:
Der Exponent wird um eins ***erniedrigt***.
Die Potenzfunktion wird mit dem ***alten*** Exponenten ***multipliziert***.

Aufleiten könnte somit bedeuten:
Der Exponent wird um eins ***erhöht***.
Die Potenzfunktion wird durch den ***neuen*** Exponenten ***dividiert***.

Das probieren wir gleich aus:

Potenzfunktion: $f(x) = 3x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{3}{2+1}x^{2+1} = \underline{\underline{x^3}}$

Man nennt F(x) auch ***Stammfunktion***, denn f(x) erhalten wir durch ableiten dieser, das heißt, f(x) stammt von der Funktion F(x) ab.

Das bestimmen der Stammfunktion nennen wir auch ***integrieren***, wir schreiben:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \mid \cdot dx \quad \Leftrightarrow \quad dF(x) = f(x)dx \quad \Leftrightarrow F(x) = \int dF(x) = \int f(x)\,dx$$

also: $F(x) = \int f(x)\,dx$

Bis jetzt ist dies eine formale Schreibweise. Nun wollen wir sie mit Leben füllen.

Wir suchen die Stammfunktion

Beispiel: Es ist die Stammfunktion F(x) zu finden, deren Ableitung f(x) = 2x ist.

Die Regel lautet also $F(x) = \int f(x)\,dx = \int 2x\,dx$

Wir probieren:
$F(x) = x^2$ denn $F'(x) = 2x = f(x)$
$F(x) = x^2 + 2$ denn $F'(x) = 2x = f(x)$

Allgemein gilt: $F(x) = x^2 + C$ denn in jedem Falle ist $F'(x) = 2x = f(x)$

Die beiden Funktionen unterscheiden sich im Absolutglied.
Sie haben aber dieselbe Ableitung, weil beim Ableiten das Absolutglied verschwindet. Deshalb müssen wir unsere Regel etwas abändern.

Es gilt: $\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$

Die Menge der Stammfunktionen

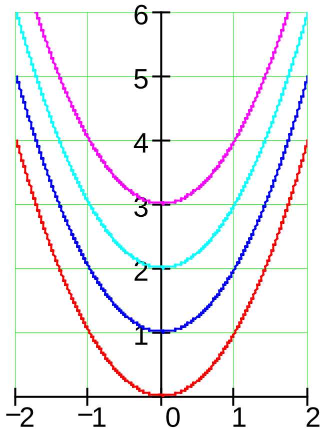
Das Beispiel zeigt, zu einer Funktion f(x) gibt es nicht nur eine, sondern unendlich viele Stammfunktionen. Sie unterscheiden sich lediglich durch das Absolutglied.

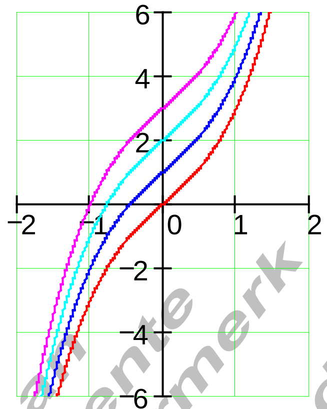
Beispiel:
Es ist die Stammfunktion $F(x)$ zu finden, deren Ableitung $f(x) = 3x^2 + 2$ ist.

$F(x) = x^3 + 2x + C$ denn $F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x)$

Graphisch lässt sich die Menge aller Stammfunktionen durch eine Kurvenschar einiger Repräsentanten darstellen.

$F(x) = x^2 + C$ $\qquad\qquad$ $F(x) = x^3 + 2x + C$





Training Int01:

Finden Sie zu folgenden Funktionen f(x) die Stammfunktion F(x).
Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch ableiten.

a)	$f(x) = x^2$	b)	$f(x) = 2x^2$	c)	$f(x) = x$	d)	$f(x) = -2x$
e)	$f(x) = \frac{1}{2}x^2$	f)	$f(x) = -\frac{1}{4}x$	g)	$f(x) = x^3$	h)	$f(x) = 4x^3$
i)	$f(x) = 2$	j)	$f(x) = x + 1$	k)	$f(x) = x^2 + x - 3$	l	$f(x) = x^n ; n \in \mathbb{N}$

Ergebnisse:

a)	$f(x) = x^2$ $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$	b)	$f(x) = 2x^2$ $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + C$	c)	$f(x) = x$ $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$	d)	$f(x) = -2x$ $F(x) = -x^2 + C$
e)	$f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $F(x) = \frac{1}{6}x^3 + C$	f)	$f(x) = -\frac{1}{4}x$ $F(x) = -\frac{1}{8}x^2 + C$	g)	$f(x) = x^3$ $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$	h)	$f(x) = 4x^3$ $F(x) = x^4 + C$
i)	$f(x) = 2$ $F(x) = 2x + C$	j)	$f(x) = x + 1$ $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C$	k)	$f(x) = x^2 + x - 3$ $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$	l	$f(x) = x^n ; n \in \mathbb{N}$ $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$