Vom unbestimmten zum bestimmten Integral

Wir haben gesehen, wenn zu einer Funktion f(x) eine Stammfunktion F(x) ermittelt werden kann, so existieren unendlich viele Stammfunktionen, die sich nur durch eine additive Konstante C voneinander unterscheiden.

Beispiel:

Funktion: $f(x) = 3x^2 + 2$

Menge der Stammfunktionen: $F(x) = x^3 + 2x + C$

Definition:

Die Menge aller Stammfunktionen zu einer Funktion $f(x)$

heißt unbestimmtes Integral zu der Funktion $f(x)$

und man schreibt: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

Der Zusammenhang zwischen der Differenzial – und Integralrechnung kann durch folgenden Satz beschrieben werden:

Satz:

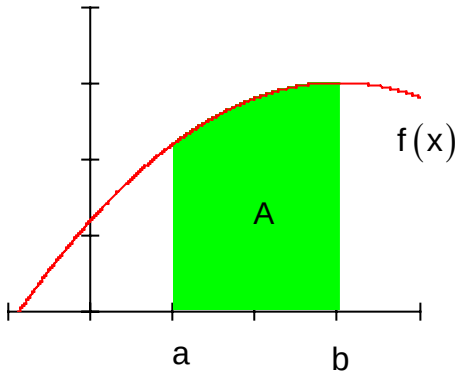
Das unbestimmte Integral stellt die Umkehrung der Differenzialrechnung dar.

$$\frac{d\left[F(x)+C\right]}{dx} = \left[F(x)+C\right]' = f(x)$$

Nun zurück zur Flächenberechnung

Die Fläche unter dem Funktionsgraphen zwischen den Intervallgrenzen [a ; b] soll bestimmt werden.

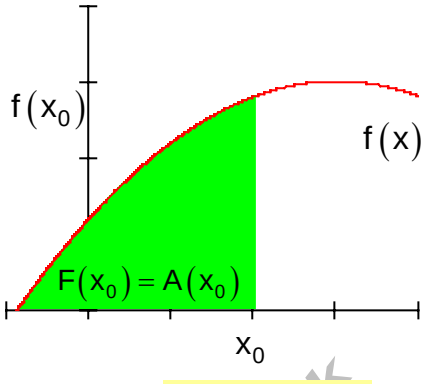
Dazu wenden wir die bisherigen Erkenntnisse auf unser Problem an.



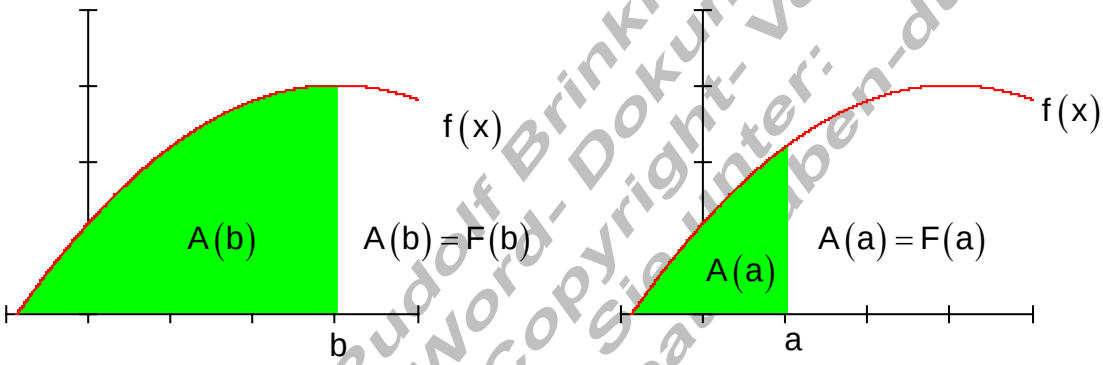
(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne diesen Copyright- Vermerk
http://www.mathe-aufgaben-du.de

Die Überlegungen bezüglich der Existenz einer Flächenfunktion führten zu folgender Erkenntnis:

Es besteht eine Beziehung zwischen der Fläche unter dem Funktionsgraphen der betrachteten Funktion f(x) bis zur Stelle x_0 und einer Funktion F(x) in der die Ableitung der Funktion F(x) an der Stelle x_0 gleich dem Funktionswert der Funktion f an der Stelle x_0 ist.



$$F'(x_0) = f(x_0)$$



Die Fläche zwischen den Intervallgrenzen [a ; b] lässt sich ermitteln aus der Differenz der Fläche unter dem Funktionsgraphen an der Stelle

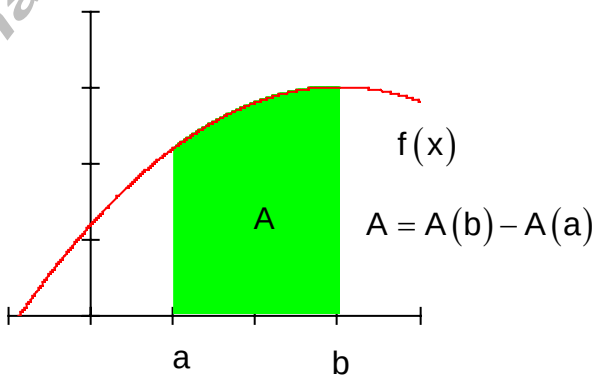
b $(A(b))$

und der Fläche an der Stelle

a $(A(a))$

also gilt: $A = A(b) - A(a)$

bzw. $F = F(b) - F(a)$



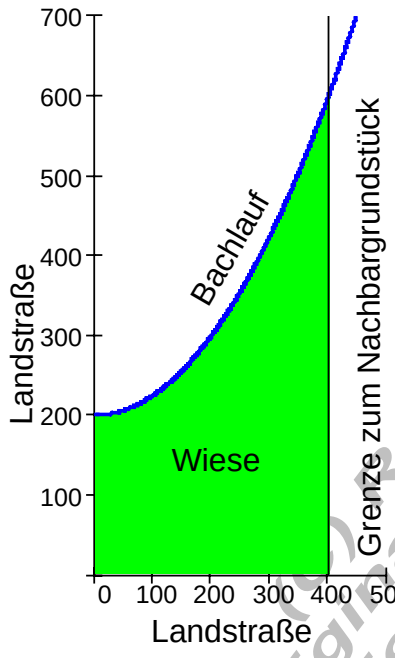
(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokument
diesen Copyright-Vermerk
erhalten Sie unter:
www.mathearbeiten-du.de

Satz:
Die Fläche unter dem Funktionsgraphen im Intervall $[a;b]$ ist die Differenz der Stammfunktion:

$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b f(x)\,dx$$

Das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ wird auch bestimmtes Integral genannt

Jetzt versuchen wir mit den bisherigen Erkenntnissen die Fläche der Wiese aus dem Einführungsbeispiel zu berechnen.



$$f(x) = \frac{1}{400}x^2 + 200$$

$$F(x) = \frac{1}{1200}x^3 + 200x + C$$

Die obere Grenze ist $b = 400$

Die untere Grenze ist $a = 0$

Wir bilden $F(b) - F(a)$

$$F(400) = \frac{1}{1200}(400)^3 + 200 \cdot 400 + C$$

$$F(0) = \frac{1}{1200}0^3 + 200 \cdot 0 + C = C$$

$$F(400) - F(0)$$

$$= \frac{1}{1200}(400)^3 + 200 \cdot 400 + C - C$$

$$= \frac{1}{1200}(400)^3 + 200 \cdot 400 = \underline{\underline{133333,\overline{3}}}$$

(c) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne diesen Copyright-Vermerk
erhalten Sie unter
http://www.mathe-aufgaben-du.de

Die Konstante fällt bei der Subtraktion heraus.
In der Praxis hat sich für die Lösung dieses Problems eine andere Schreibweise bewährt:

$$A = \int_0^{400}\left(\frac{1}{400}x^2 + 200\right)dx = \frac{1}{1200}x^3 + 200 \cdot x\Big|_0^{400}$$

$$= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 - \underbrace{\left[\frac{1}{1200}0^3 + 200 \cdot 0\right]}_{0}$$

$$= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 = \underline{\underline{133333,\overline{3}}}$$