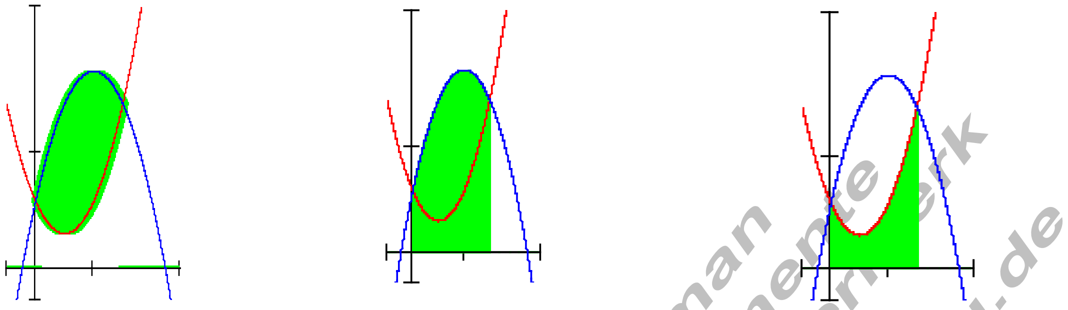
Flächen zwischen zwei Funktionsgraphen

In manchen Aufgaben ist der Inhalt einer **Fläche** zu berechnen, die **zwischen zwei Funktionsgraphen** liegt. Flächeninhalte dieser Art lassen sich als Differenzen von bestimmten Integralen ermitteln. Liegen etwa beide Graphen oberhalb der *x*-Achse, so gehen Sie nach folgendem Schema vor:



A **A_1** **A_2**

$A = A_1 - A_2$

Beispiel:
Die Fläche zwischen den Funktionsgraphen von
$f(x) = x^2 - 2x + 2$ und $g(x) = -x^2 + 4x + 2$ soll ermittelt werden.
Die x – Werte der Schnittpunkte beider Graphen bilden die Integrationsgrenzen.

Bestimmung der x – Koordinaten der Schnittpunkte:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 4x + 2$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0$$
$\Leftrightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ sind die Integrationsgrenzen

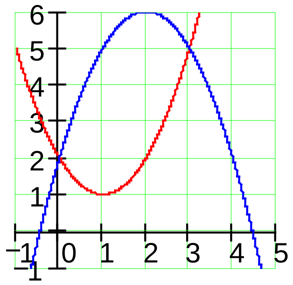
Bilden der Integrale:

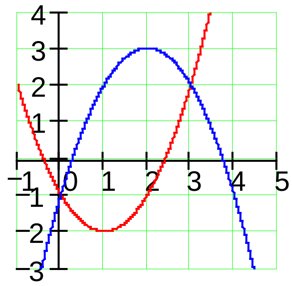
$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 \left(x^2 - 2x + 2\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$
$$\int_0^3 g(x)\,dx = \int_0^3 \left(-x^2 + 4x + 2\right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 = -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

Da die Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen stets positiv sein soll, ist von dem größeren Wert der kleinere abzuziehen.

$$A = \int_0^3 g(x)\,dx - \int_0^3 f(x)\,dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

Wie bekannt, hängt das Vorzeichen des Ergebnisses einer Flächenberechnung davon ab, ob die Fläche oberhalb oder unterhalb der x – Achse liegt.
Wir untersuchen nun, ob das einen Einfluss auf die Berechnung im obigen Beispiel hat. Wir verschieben die Graphen der beiden Funktionen längs der y – Achse um **drei** Einheiten nach unten und berechnen den Flächeninhalt neu.





Aus der Anschauung heraus sollte das Ergebnis gleich sein.
Auch die x – Werte der Schnittpunkte und somit die Integrationsgrenzen bleiben unverändert.

$f(x) = x^2 - 2x - 1$ und $g(x) = -x^2 + 4x - 1$

Anastz: $A = \int_0^3 f(x)\,dx - \int_0^3 g(x)\,dx = \int_0^3 \left(f(x) - g(x)\right)dx$

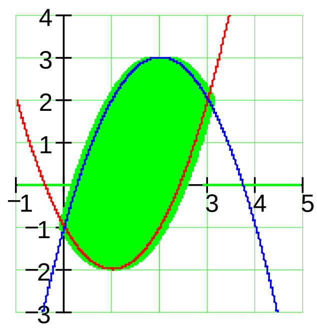
mit $f(x) - g(x) = 2x^2 - 6x$ wird:

$$A = \int_0^3 \left(2x^2 - 6x\right)dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_0^3 = \frac{2}{3}\cdot 27 - 3\cdot 9 = 18 - 27 = \underline{\underline{-9}}$$

Da es sich bei einer Fläche zwischen zwei Graphen stets um eine physikalische Fläche handelt, muss das Ergebnis positiv sein.
Das erreichen wir durch Betragsbildung.

$$A = \left|\int_0^3 \left(2x^2 - 6x\right)dx\right| = \left|\left[\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_0^3\right| = \left|\frac{2}{3}\cdot 27 - 3\cdot 9\right| = \left|18 - 27\right| = \left|-9\right| = \underline{\underline{9}}$$

Verallgemeinerung der Methode

Fläche zwischen zwei Graphen: Wird eine Fläche von einer oberen und einer unteren Kurve begrenzt, die zu den Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gehören, dann kann man die von ihnen begrenzte Fläche wie folgt berechnen: $A = \left\|\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx\right\|$ Die Integrationsgrenzen a und b sind die x – Werte der Schnittpunktkoordinaten beider Graphen.	

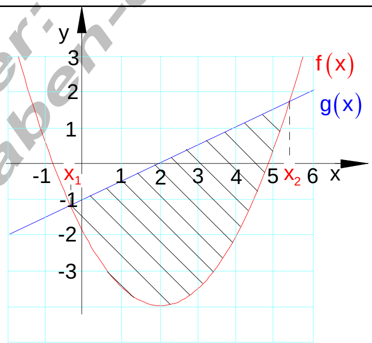
Training:

Flächen zwischen Funktionsgraphen.
Bestimmen Sie die Flächen zwischen folgenden Funktionsgraphen und zeichnen Sie beide Graphen in ein Koordinatensystem. Schraffieren Sie die berechnete Fläche.

1.	$f(x)=x^2-x-6\,;\,g(x)=4x-10$	2.	$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+3\,;\,g(x)=3x$
3.	$f(x)=0{,}75\left(x^2-5x+4\right);\,g(x)=0{,}75x+3$	4.	$f(x)=x^2+5x+\frac{9}{4}\,;\,g(x)=-\frac{3}{2}x-\frac{21}{4}$
5.	$f(x)=(x-2)^2-4\,;\,g(x)=x-1$	6.	$f(x)=x^2-4x+1;\,g(x)=-x^2+2x+1$
7.	$f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+3\,;\,g(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$	8.	$f(x)=x^2+3x\,;\,g(x)=0{,}5x^2$
9.	$f(x)=0{,}5x^2-2x-1;\,g(x)=2x^2+2x+1$	10.	$f(x)=-0{,}5x^2+2\,;\,g(x)=-\frac{1}{9}(x-1)^2+1$

Ausführliches Beispiel:

Zuerst werden beide Graphen in ein Koordinatensystem gezeichnet. Die Integrationsgrenzen sind die $x-$Koordinaten der Scnittpunkte beider Graphen.



$$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2-4=\frac{1}{2}x^2-2x-2$$

$$g(x)=\frac{1}{2}x-1$$

$$\underbrace{f(x)-g(x)}_{\text{Differenzfunktion}}=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2-2x-2-\left(\frac{1}{2}x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-1=0$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{33}{4}}\approx-0{,}372;\,x_2=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{33}{4}}\approx5{,}372$$

$$A=\left|\int_{\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{33}{4}}}^{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{33}{4}}}\Big[\underbrace{f(x)-g(x)}_{\text{Differenzfunktion}}\Big]dx\right|=\left|\int_{\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{33}{4}}}^{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{33}{4}}}\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-1\right]dx\right|=\left|\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{4}x^2-x\right]_{\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{33}{4}}}^{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{33}{4}}}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{33}{4}}\right)^3-\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{33}{4}}\right)^2-\left(\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{33}{4}}\right)-\left[\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{33}{4}}\right)^3-\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{33}{4}}\right)^2-\left(\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{33}{4}}\right)\right]\right|$$

$$=\underline{\underline{15{,}798}}$$

Die Fläche zwischen den beiden Graphen bertägt $\underline{\underline{15{,}798\text{ FE}}}$

Bemerkung:
Man kann die Rechnung auch ohne Beträge durchführen, wenn man von dem Ergebnis, falls es negativ ist, den Betrag bildet.
Falls f(x) im Integrationsintervall [a ; b] **oberhalb** von g(x) liegt, ist das Ergebnis **positiv**.
Falls f(x) im Integrationsintervall [a ; b] **unterhalb** von g(x) liegt, ist das Ergebnis **negativ**.

Ergebnisse:

1.	$f(x)=x^2-x-6\,;\,g(x)=4x-10\quad \int_1^4\left[f(x)-g(x)\right]dx=-4{,}5\Rightarrow A=\lvert -4{,}5\rvert=\underline{\underline{4{,}5\text{ FE}}}$
2.	$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+3\,;\,g(x)=3x\quad \int_{-3}^{2}\left[f(x)-g(x)\right]dx=10{,}417\Rightarrow A=\underline{\underline{10{,}417\text{ FE}}}$
3.	$f(x)=0{,}75\left(x^2-5x+4\right);\,g(x)=0{,}75x+3\quad \int_0^6\left[f(x)-g(x)\right]dx=-27\Rightarrow A=\underline{\underline{27\text{ FE}}}$
4.	$f(x)=x^2+5x+\frac{9}{4}\,;\,g(x)=-\frac{3}{2}x-\frac{21}{4}\quad \int_{-5}^{-\frac{3}{2}}\left[f(x)-g(x)\right]dx=-7{,}164\Rightarrow A=\underline{\underline{7{,}164\text{ FE}}}$
5.	$f(x)=(x-2)^2-4\,;\,g(x)=x-1\quad \int_{\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}}^{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}}\left[f(x)-g(x)\right]dx=-16{,}039\Rightarrow A=\underline{\underline{16{,}039\text{ FE}}}$
6.	$f(x)=x^2-4x+1;\,g(x)=-x^2+2x+1\quad \int_0^3\left[f(x)-g(x)\right]dx=-9\Rightarrow A=\underline{\underline{9\text{ FE}}}$
7.	$f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+3\,;\,g(x)=\frac{1}{2}x^2-2x\quad \int_1^3\left[f(x)-g(x)\right]dx=-\frac{4}{3}\Rightarrow A=\underline{\underline{\frac{4}{3}\text{ FE}}}$
8.	$f(x)=x^2+3x\,;\,g(x)=0{,}5x^2\quad \int_{-6}^{0}\left[f(x)-g(x)\right]dx=-18\Rightarrow A=\underline{\underline{18\text{ FE}}}$
9.	$f(x)=0{,}5x^2-2x-1;\,g(x)=2x^2+2x+1\quad \int_{-2}^{-\frac{2}{3}}\left[f(x)-g(x)\right]dx=0{,}593\Rightarrow A=\underline{\underline{0{,}593\text{ FE}}}$
10.	$f(x)=-0{,}5x^2+2\,;\,g(x)=-\frac{1}{9}(x-1)^2+1\quad \int_{-2}^{\frac{10}{7}}\left[f(x)-g(x)\right]dx=\frac{128}{49}\Rightarrow A=\underline{\underline{\frac{128}{49}\text{ FE}}}$