Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit

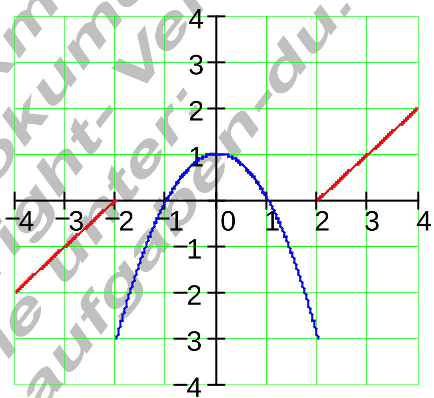
Stetigkeit

Der Begriff der Stetigkeit soll zunächst anschaulich erläutert werden.

Eine **Funktion f(x)** heißt dann in einem Intervall [a ; b] **stetig**, wenn man den dazugehörigen Graphen von einem Intervallpunkt bis zum anderen zeichnen kann, ohne den Stift dabei absetzen zu müssen.
oder
Wenn sich die Punkte des Graphen der **Funktion f(x)** innerhalb eines Intervalls [a ; b] nahtlos aneinanderfügen, ohne dass sich irgendwelche Sprünge ergeben, dann ist die Funktion f(x) im Intervall [a ; b] stetig.

Beispiel:
Wir betrachten die zusammengesetzte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{für } -\infty < x < -2 \\ -x^2+1 & \text{für } -2 \le x \le 2 \\ x-2 & \text{für } 2 < x < \infty \end{cases}$$



An den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ weist der Graph von $f(x)$ Sprünge auf.
An diese Stellen ist $f(x)$ unstetig.

Beispiele stetiger Funktionen:

Jede **ganzrationale Funktion** ist auf ihrem Definitionsbereich stetig.
Jede **gebrochen rationale Funktion** ist in ihrem Definitionsbereich stetig (also nur dort unstetig, wo der Nenner Nullstellen hat, denn dort ist sie nicht definiert).

Für die klassische Betrachtung der Naturwissenschaften gilt:
Die Natur macht keine Sprünge. Danach verlaufen zahlreiche Naturvorgänge stetig:
Das Wachstum von Pflanzen und anderen Lebewesen mit der Zeit.
Die Druckerhöhung in einem Dampfkochtopf mit der Temperatur.
Es gibt aber auch unstetige (sprunghafte) Änderungen wie Gebühren bei Postsendungen oder Rabattstaffelungen.

Mathematische Definition der Stetigkeit

Die Definitionsmenge der Funktion $f(x)$ sei D_f und deren Wertemenge W_f

Die Funktion $f(x)$ heißt an der Stelle $x = x_0$ mit $x_0 \in D_f$ genau dann stetig, wenn

$\rightarrow$ der Funktionswert $f(x_0)$ existiert, d.h. wenn $f(x_0) \in W_f$,

$\rightarrow$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x = x_0$ existiert
und gleich einer bstimmten Zahl g ist und wenn

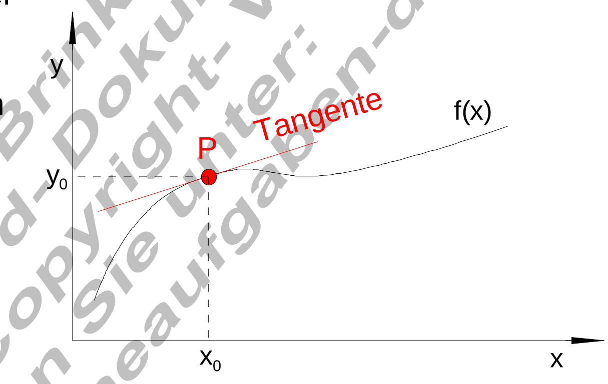
$\rightarrow$ $f(x_0) = g$ gilt.

Ist nur eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, dann ist die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ unstetig.

Differenzierbarkeit

Wir betrachten die Differenzierbarkeit einer Funktion zunächst nur anschaulich.

Die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0 gibt die Steigung der Tangente an, die den Funktionsgraphen im Punkt $P_0\ (x_0 \mid y_0)$ berührt und ist damit zugleich die Steigung des Funktionsgraphen im Punkt $P_0\ (x_0 \mid y_0)$.



Man sagt auch Steigung der Funktion.

Demzufolge ist eine Funktion an der Stelle x_0 nur dann differenzierbar, wenn eine eindeutige Tangente existiert.

Eine Bedingung für die Differenzierbarkeit einer Funktion an der Stelle x_0 ist:

Die Funktion muss an der Stelle x_0 stetig sein.

Diese Forderung ist notwendig aber nicht ausreichend, wie folgendes Beispiel zeigt.

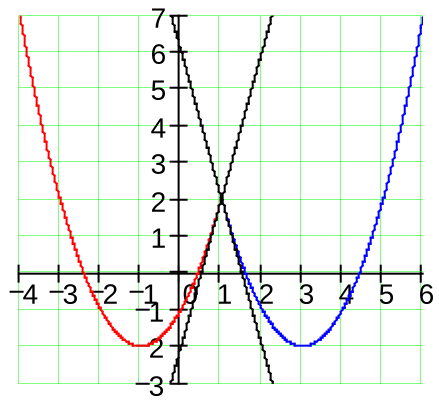
Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 \text{ für } x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 \text{ für } x \geq 1 \end{cases}$$

Im Punkt $(1|\,2)$ existiert keine eindeutige Tangente.

$t_1(x) = 4x - 2$

$t_2(x) = -4x + 6$

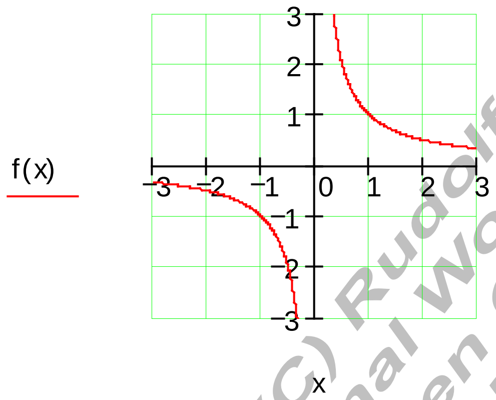


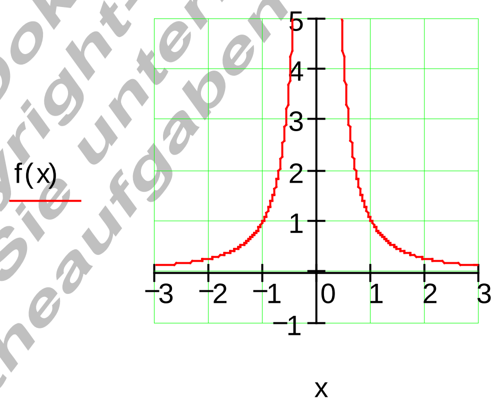
Die Funktion f(x) ist für x = 1 stetig, es gibt dort keinen Sprung.
Wir haben aber im Punkt P(1 | 2) zwei verschiedene Tangenten.
Das bedeutet, für x = 1 gibt es auch zwei Tangentensteigungen, also zwei Ableitungswerte. Das bedeutet, die Ableitungsfunktion ist an der Stelle x = 1 nicht eindeutig. Das hat zur Folge, dass f(x) an der Stelle x = 1 nicht differenzierbar ist.

Anschaulich bedeutet das:
Eine Funktion f(x) ist an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn die Ableitung an dieser Stelle eindeutig ist, also genau eine Tangente existiert.
Man kann auch sagen, an Stellen, an denen der Graph einer Funktion Spitzen oder Knicke besitzt, ist die Funktion nicht differenzierbar.
Umgekehrt bedeutet das für die Stetigkeit:
Ist eine Funktion an der Stelle x_0 differenzierbar, dann ist sie dort auch stetig.

Weitere Beispiele:

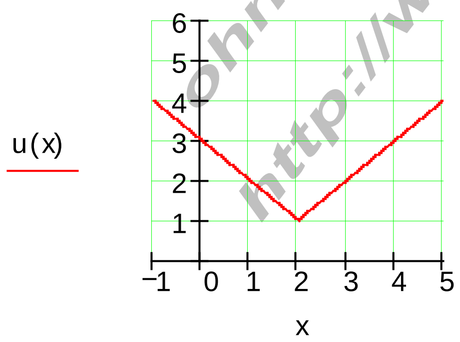
$f(x) := \frac{1}{x}$ $\qquad$ $f(x) := \frac{1}{x^2}$

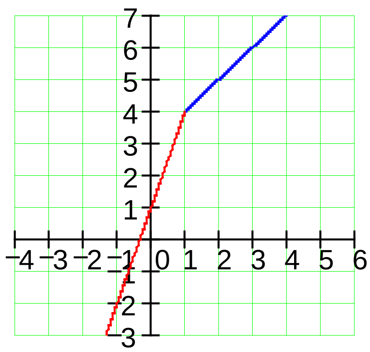




Beide Funktionen sind an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, weil sie dort nicht definiert sind.

$u(x) := |x - 2| + 1$





u(x) ist an der Stelle $x_0 = 2$ zwar stetig, aber nicht differenzierbar (Spitze).

An der Stelle $x_0 = 1$ ist die Funktion zwar stetig aber nicht differenzierbar (Knick).

Mathematische Definition der Differenzierbarkeit:

Linksseitiger Grenzwert der Differenzenquotientenfunktion:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ für } x < x_0$$

Rechtsseitiger Grenzwert der Differenzenquotientenfunktion:

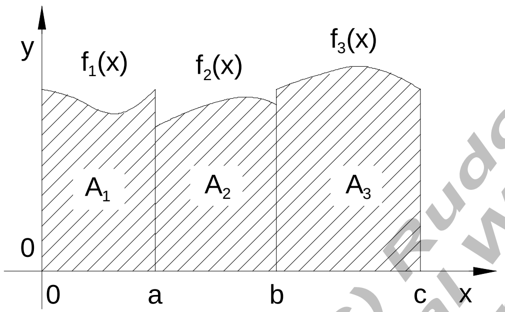
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ für } x > x_0$$

Ist der linksseitige gleich dem rechtsseitigen Grenzwert der Differenzenquotientenfunktion, so ist $f(x)$ differenzierbar an der Stelle x_0.
Es existiert dann die Ableitung $f'(x_0)$, die Steigung der Tangente an den Graphen im Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$.

Integrierbarkeit

Eine Funktion ist integrierbar, wenn sie zumindest stückweise stetig ist.

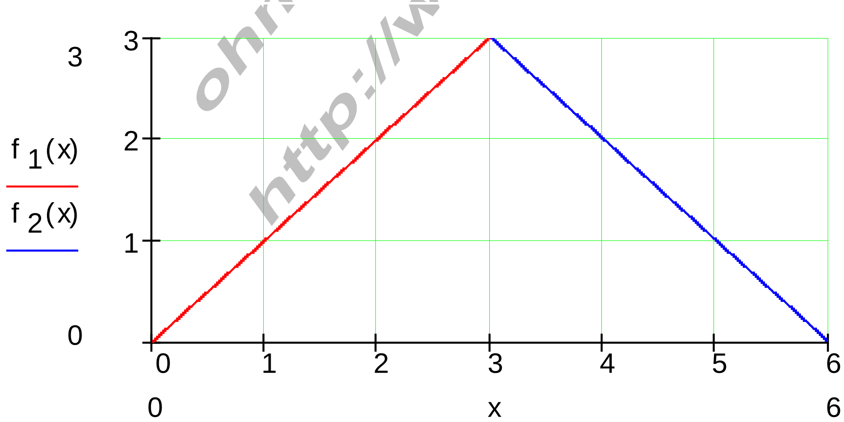
Beispiele:
Gesucht ist die schraffierte Fläche.



$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \int_0^a f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \int_b^c f_3(x)\,dx$$

Beispiel:
Gesucht ist die Dreiecksfläche.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x \text{ für } (0 \le x < 3) \\ f_2(x) = -x + 6 \text{ für } (3 \le x \le 6) \end{cases}$$



$$A = \int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^3 f_1(x)\,dx + \int_3^6 f_2(x)\,dx$$

$$= \int_0^3 x\,dx + \int_3^6 (-x+6)\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3 + \left[-\frac{x^2}{2} + 6x\right]_3^6$$

$$= \frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} + \left[\left(-\frac{6^2}{2} + 6\cdot 6\right) - \left(-\frac{3^2}{2} + 6\cdot 3\right)\right] = \underline{\underline{9\ \text{FE}}}$$

Obwohl die Funktion an der Stelle P (3 **|** 3) nicht differenzierbar ist, kann die Fläche über zwei Teilintegrale gefunden werden.