

Ableitung- und Integrale elementarer Funktionen

Funktion	Ableitung	Stammfunktion
$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$F(x) = k \cdot x + C$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} a^x + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = x \cdot \ln(x) - x + C \quad (x > 0)$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$F(x) = -\cos(x) + C$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$F(x) = \sin(x) + C$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$F(x) = \ln x + C \quad (x \neq 0)$

Gegenüberstellung von Differentiations- und Integrationsregeln

Konstantenregel	
$f(x) = k \cdot u(x)$ mit $k = \text{konstant}$ $\Rightarrow f'(x) = k \cdot u'(x)$	$f(x) = k \cdot u(x)$ mit $k = \text{konstant}$ $\int f(x) dx = \int k \cdot u(x) dx = k \cdot \int u(x) dx$
Beispiel: $f(x) = 3x^4 \quad k = 3 \quad u(x) = x^4$ $\Rightarrow u'(x) = 4x^3$ $f'(x) = k \cdot u'(x) = 3 \cdot 4x^3 = \underline{\underline{12x^3}}$	Beispiel: $f(x) = 3x^2 \Rightarrow k = 3 \quad u(x) = x^2$ $\int f(x) dx = 3 \cdot \int u(x) dx = 3 \cdot \int x^2 dx$ $= 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C = \underline{\underline{x^3 + C}}$

Summenregel	
$f(x) = u(x) \pm v(x)$ $\Rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$	$f(x) = u(x) \pm v(x)$ $\int f(x) dx = \int u(x) dx \pm \int v(x) dx$
Beispiel: $f(x) = 5x^2 + 3x \quad u(x) = 5x^2 \quad v(x) = 3x$ $\Rightarrow u'(x) = 10x \quad v'(x) = 3$ $f'(x) = u'(x) + v'(x) = \underline{\underline{10x + 3}}$	Beispiel: $f(x) = x^2 + x + 1$ $\int f(x) dx = \int x^2 dx + \int x dx + \int 1 dx$ $= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$

Weitere Regeln für die Differentialrechnung

Produktregel:	$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow$ in Kurzform: $f' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Beispiel:	$f(x) = x \cdot e^x$ mit $u(x) = x$ und $v(x) = e^x$ $f' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $u'(x) = 1; v'(x) = e^x$ $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{\underline{(x+1)e^x}}$
Quotientenregel:	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow$ in Kurzform: $f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
Beispiel:	$f(x) = \frac{e^x}{x}$ mit $u(x) = e^x$ und $v(x) = x$ $f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ $u'(x) = e^x; v'(x) = 1; v^2 = x^2$ $f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \underline{\underline{\frac{(x-1)e^x}{x^2}}}$
Kettenregel:	$f(x) = f[z(x)] \Rightarrow f'(x) = \underbrace{f'(z)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{z'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$
Beispiel:	$f(x) = e^{2x}$ mit $z = 2x$ folgt $f(z) = e^z$ $f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$ $f'(z) = e^z; z'(x) = 2 \Rightarrow f'(x) = e^z \cdot 2 = \underline{\underline{2 \cdot e^{2x}}}$

Training Diff_Int02:

Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel

Differenzieren Sie folgende Funktionen mit den Ihnen bekannten Regeln.

1.	$f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3}$	2.	$f(x) = (1 - e^{ax})^2$
3.	$f(x) = (e^{2x} + e^{-x})^2$	4.	$f(x) = (x+1)e^x$
5.	$f(x) = (3-2x)e^{\frac{1}{2}x}$	6.	$f(x) = a(x-3)e^{4x-3}$
7.	$f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$	8.	$f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$
9.	$f(x) = \frac{x}{x-1}$	10.	$f(x) = \frac{1}{x}(x^2-4)$

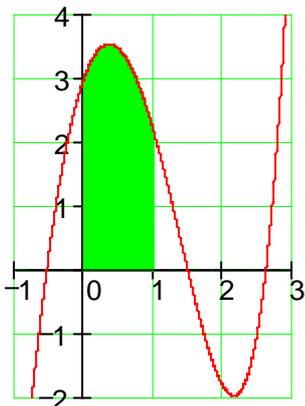
Weitere Regeln für die Integralrechnung

Durch Vertauschen der Integrationsgrenzen ändert sich das Vorzeichen des Integrals

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad \text{oder} \quad -\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$$

Beispiel:

$$f(x) := 3e^x - 6x^2$$



Die gekennzeichnete Fläche soll berechnet werden.

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (3e^x - 6x^2) dx$$

$$= 3 \int_0^1 e^x dx - 6 \int_0^1 x^2 dx =$$

$$3 \int_0^1 e^x dx + 6 \int_1^0 x^2 dx$$

$$= \left[3e^x \right]_0^1 + \left[2x^3 \right]_1^0$$

$$= 3e^1 - 3e^0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1$$

$$= 3e^1 - 5 \approx \underline{\underline{3,155}}$$

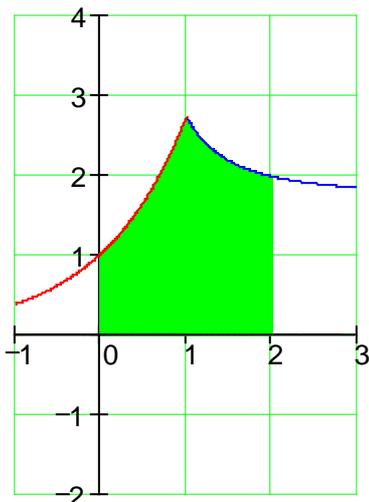
Sind obere und untere Grenze beim bestimmten Integral gleich, so ist der Wert des bestimmten Integrals Null.

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Der Wert des gesamten Integrals ergibt sich durch Summierung der Integrale über alle Teilbereiche.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Beispiel:



$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} + (e-1) & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Die gekennzeichnete Fläche soll berechnet werden.

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + e - 1 \right) dx \\ &= \left[e^x \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x} + e \cdot x - x \right]_1^2 \\ &= e^1 - e^0 + \left[-\frac{1}{2} + 2e - 2 \right] - \left[-1 + e - 1 \right] \\ &\approx \underline{\underline{3,937}} \end{aligned}$$

Training Diff_Int01:

Ableiten und integrieren mit e - Funktionen

Differenzieren Sie folgende Funktionen.			
1.	$f(x) = e^{-4x} - e^{4x}$	2.	$f(x) = \frac{3}{2} e^{-5x^2 - 3x}$
3.	$f(x) = -4e^x (e^{-x} + 3)$	4.	$f(x) = -e^{t-x} - 2t \cdot e^{-tx}$
5.	$f(x) = t \cdot e^{2-3x} - 6e^{x^2+3}$	6.	$f(x) = t(e^{-x} - 3x^2)$
Integrieren Sie folgende Funktionen und kontrollieren Sie die Ergebnisse durch ableiten			
7.	$f(x) = \frac{1}{16} (x^2 - 3e^x)$	8.	$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}$
9.	$f(x) = t \cdot x - \frac{3}{2} e^x + t^2 + 2e$	10.	$f(x) = t^2 x (x^2 - 8x)$