Integration von Produkten, partielle Integration

Soll das Produkt zweier Funktionen integriert werden, so versagen in den meisten Fällen die bisher bekannten Methoden der Integration.

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) dx = ?$$

Substitution: $u(x) = x^2 = u$

bilde $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$

$$\int f(x)\,dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u \cdot \ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

Zurücksubstitution: $\frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$

also: $\int (x)dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$

Dieses Integral ließ sich mit der Methode der Substitution lösen, da durch die Substitution der Faktor x herausfällt. Das ist normalerweise nicht der Fall.

$$f(x) = x \cdot \ln(x) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(x \cdot \ln(x)\right) dx = ?$$

Dieses Integral lässt sich nicht durch Substitution lösen.
Wir entwickeln aus der Produktregel für die Differentialrechnung einen Ansatz.

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Unter Vernachlässigung der Konstanten C
gilt nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung:

$$\int f'(x)\,dx = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

mit $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ muss demzufolge auch gelten

$$\int u'(x) \cdot v(x)\,dx + \int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x)$$

umgestellt nach $\int u(x) \cdot v'(x)\,dx$ ergibt:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx$$

umgestellt nach $\int u'(x) \cdot v(x)\,dx$ ergibt:

$$\int u'(x) \cdot v(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\,dx$$

Mit Hilfe dieser Umformungen wird das Integral über ein Produkt zweier Faktoren zwar nicht gelöst, jedoch bei geschickter Wahl von u und v ’ bzw. von u ’ und v lässt sich der Ausdruck so umformen, dass sich die Integrale lösen lassen.

Die Vorgehensweise soll nun an einigen Beispielen gezeigt werden.

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v'} \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^x \Rightarrow v = \int e^x \, dx = e^x$$

$$\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + C = \underline{\underline{(x-1)e^x + C}}$$

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{k \cdot x}}_{v'} \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$v' = e^{k \cdot x} \Rightarrow v = \int e^{k \cdot x} \, dx$ Lösung durch Substitution

$v = \int e^{k \cdot x} \, dx$

Substitution $u = k \cdot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = k \Rightarrow dx = \frac{1}{k} du$

$\Rightarrow \frac{1}{k} \int e^u \, du = \frac{1}{k} e^u$

Rücksubstitution: $v = \int e^{k \cdot x} \, dx = \frac{1}{k} e^{k \cdot x}$

$$\int x \cdot e^{k \cdot x} \, dx = u \cdot v - \int u' v \, dx = x \cdot \frac{1}{k} e^{k \cdot x} - \int 1 \cdot \frac{1}{k} e^{k \cdot x} \, dx = \frac{x}{k} e^{k \cdot x} - \frac{1}{k} \underbrace{\int e^{k \cdot x} \, dx}_{\frac{1}{k} e^{k \cdot x}}$$

$$= \frac{x}{k} e^{k \cdot x} - \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k} e^{k \cdot x} = \frac{x}{k} e^{k \cdot x} - \frac{1}{k^2} e^{k \cdot x} = \underline{\underline{\left(\frac{x}{k} - \frac{1}{k^2} \right) e^{k \cdot x} + C}}$$

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v'} \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = \ln(x) \Rightarrow v = x \cdot \ln(x) - x$$

$$\int x \cdot \ln(x) \, dx = x \cdot (x \cdot \ln(x) - x) - \int 1 \cdot (x \cdot \ln(x) - x) \, dx$$

$$\Leftrightarrow \int x \cdot \ln(x) \, dx = x^2 \cdot \ln(x) - x^2 - \int x \cdot \ln(x) \, dx + \int x \, dx \mid + \int x \cdot \ln(x) \, dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \int x \cdot \ln(x) \, dx = x^2 \cdot \ln(x) - x^2 + \frac{1}{2} x^2 \mid : 2$$

$$\Leftrightarrow \int x \cdot \ln(x) \, dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4} x^2 + C}} \; (x > 0)$$

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{v'}\, dx = u \cdot v - \int u' v\, dx \quad u = x^2 \Rightarrow u' = 2x \quad v' = e^{2x} \Rightarrow v = \int e^{2x}\, dx$$

––––––––––––––Zwischenrechnung––––––––––––––––––

$$\int e^{2x}\, dx \quad \text{Substitution: } u = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int e^u\, du = \frac{1}{2} e^u \quad \text{Rücksubstitution: } \boxed{\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x}}$$

––

$$\int x^2 \cdot e^{2x}\, dx = \underbrace{x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{2x}}_{u \cdot v} - \int \underbrace{2x}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} e^{2x}}_{v}\, dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{2x} - \int x \cdot e^{2x}\, dx$$

––

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{v'}\, dx = u \cdot v - \int u' v\, dx \quad u = x \Rightarrow u' = 1 \quad v' = e^{2x} \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \text{ (siehe oben)}$$

$$\int x \cdot e^{2x}\, dx = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} \underbrace{\int e^{2x}\, dx}_{\frac{1}{2} e^{2x}} = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

––

$$\int x^2 \cdot e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{2x} - \underbrace{\int x \cdot e^{2x}\, dx}_{\frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}} = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{2x} - \left(\frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right)$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} = \underline{\underline{\frac{1}{4}\left(2x^2 - 2x + 1\right) e^{2x} + C}}$$

Dieses Beispiel zeigt, dass beim integrieren oftmals mehrere Verfahren nacheinander anzuwenden sind. Da die Zwischenergebnisse bei der partiellen Integration oft schon bekannte Integrale sind, die durch Substitution gefunden wurden, sollte man sich diese in Form einer Integraltabelle merken.

Es gibt noch weitere Verfahren und Techniken des Integrierens, auf die hier an dieser Stelle nicht eingegangen werden soll.
Zu nennen sind da z.B. die Integration gebrochen rationaler Funktionen mit dem Verfahren der Partialbruchzerlegung.