Lösungen Parameteraufgaben zur Differenzial- und Integralrechnung I

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$P_{k_y}\left(0 \mid 1-k\right)$ $\qquad P_{k_x}\left(\ln(k) \mid 0\right)$
	b)	Tiefpunkt: $\qquad P_{k_{Min}}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right) \mid -\frac{1}{4}k^2\right)$
	c)	Wendepunkt: $\qquad P_{k_w}\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right) \mid -\frac{3}{16}k^2\right)$
	d)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f_k(x) = \infty$
	e)	Fläche: $\qquad A_k = \left\lvert -\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2} \right\rvert$
	f)	Siehe ausführliche Lösungen
	g)	Funktionsgleichung der Ortskurve für alle Tiefpunkte: $\quad f_{ok}(x) = -e^{2x}$
	h)	Die Fläche für k = 5 beträgt 8 FE.

E2	Ergebnisse	
	a)	Für alle $k \in \mathbb{R}$ existiert ein Schnittpunkt mit der $y-$Achse $\; P_{k_y}\left(0 \mid \frac{k}{4} - 2\right)$ Für alle $k > 0$ existiert ein Schnittpunkt mit der $x-$Achse $\; P_{k_x}\left(2 \cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0\right)$
	b)	$f_k'(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - e^{\frac{1}{2}\cdot x} \qquad f_k''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} \qquad f_k'''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$
	c)	Für alle $k > 0$ existiert ein relatives Minimum $\qquad P_{k_{Min}}\left(2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \mid -\frac{4}{k}\right)$
	d)	Für alle $k > 0$ existiert ein Wendepunkt $\qquad P_{k_w}\left(2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \mid -\frac{3}{k}\right)$
	e)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f_k(x) = \infty$
	f)	$f_{ok}(x) = -e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ $\quad$ ist die Ortskurve der Tiefpunkte von $f_k(x)$
	g)	Fläche: $\qquad A_k = \left\lvert -\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4 \right\rvert$
	h)	Siehe ausführliche Lösung
	i)	Fläche A_1 = 12,25 FE.

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösung	
	a)	Achsenschnittpunkte: Schnittpunkt mit der y- Achse: $f_k(x) = e^{2x} - k \cdot e^x$ $y_s = f_k(0) = e^{2 \cdot 0} - k \cdot e^0 = 1 - k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}(0 \mid 1-k)}}$ Schnittpunkt mit der x- Achse (Nullstelle): $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - k \cdot e^x = 0 \mid e^x$ ausklammern $\Leftrightarrow \underbrace{(e^x - k)}_{=0} \cdot \underbrace{e^x}_{\neq 0} = 0 \mid$ Satz vom Nullprodukt anwenden $e^x - k = 0 \mid +k \Leftrightarrow e^x = k \mid \ln(\ ) \Leftrightarrow x = \ln(k)$ $\underline{\underline{P_{k_x}(\ln(k) \mid 0)}}$

A1 Ausführliche Lösung

b) Extrempunkte:

$$f_k(x) = e^{2x} - k \cdot e^x$$

$$f_k'(x) = 2 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = \left(2 \cdot e^x - k\right) \cdot e^x$$

$$f_k''(x) = 4 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = \left(4 \cdot e^x - k\right) \cdot e^x$$

$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(2 \cdot e^x - k\right) \cdot e^x = 0 \,|$ Satz vom Nullprodukt anwenden

$$2 \cdot e^x - k = 0 \,|+k \Leftrightarrow 2 \cdot e^x = k \,|:2 \Leftrightarrow e^x = \frac{k}{2} \,|\ln(\ )$$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{k}{2}\right)$ ist eine mögliche Extremstelle

Überprüfung durch die 2. Ableitung: $f_k''(x) \neq 0$

$$f_k''(x) = f_k''\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\right) = 4 \cdot e^{2 \cdot \ln\left(\frac{k}{2}\right)} - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} = 4 \cdot \left(e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}\right)^2 - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}$$

mit $e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} = \frac{k}{2}$ wird:

$$f_k''(x) = 4 \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{2} = 4 \cdot \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} = k^2 - \frac{k^2}{2} = \frac{k^2}{2} > 0$$

Bei $x = x_E = \ln\left(\frac{k}{2}\right)$ befindet sich ein relatives Minimum (Tiefpunkt)

Extremwert:

$$y_{k_E} = f_k(x_E) = f_k\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\right) = e^{2 \cdot \ln\left(\frac{k}{2}\right)} - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}$$

$$= \left(\frac{k}{2}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{2} = \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} = \frac{1}{4}k^2 - \frac{2}{4}k^2 = -\frac{1}{4}k^2$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt: $\underline{\underline{P_{k_{Min}}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right) \,|\, -\frac{1}{4}k^2\right)}}$

A1 Ausführliche Lösung

c) Wendepunkt:

Bilden der 3. Ableitung aus

$$f_k''(x) = 4 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = \left(4 \cdot e^x - k\right) \cdot e^x$$

$$f_k'''(x) = 8 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = \left(8 \cdot e^x - k\right) \cdot e^x$$

Notwendige und hinreichende Bedingung für Wendepunkt:

$$f_k''(x) = 0 \wedge f_k'''(x) \neq 0$$

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(4 \cdot e^x - k\right) \cdot e^x = 0 \,|\, \text{Satz vom Nullprodukt anwenden}$$

$$4 \cdot e^x - k = 0 + k \Leftrightarrow 4 \cdot e^x = k \,|: 4 \Leftrightarrow e^x = \frac{k}{4} \,|\ln(\ )$$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{k}{4}\right)$ ist eine mögliche Wendestelle

Überprüfung durch die 3. Ableitung: $f_k'''(x) \neq 0$

$$f_k'''(x) = f_k'''\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\right) = 8 \cdot e^{2 \cdot \ln\left(\frac{k}{4}\right)} - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{4}\right)} = 8 \cdot \left(\frac{k}{4}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{4}$$

$$= \frac{8}{16}k^2 - \frac{1}{4}k^2 = \frac{1}{4}k^2 \neq 0$$

Bei $x = x_w = \ln\left(\frac{k}{4}\right)$ befindet sich ein Wendepunkt

$$y_{k_w} = f_k(x_w) = f_k\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\right) = e^{2 \cdot \ln\left(\frac{k}{4}\right)} - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{4}\right)}$$

$$= \left(\frac{k}{4}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{4} = \frac{k^2}{16} - \frac{k^2}{4} = \frac{1}{16}k^2 - \frac{4}{16}k^2 = -\frac{3}{16}k^2$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt: $\underline{\underline{P_{k_w}\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right) \,|\, -\frac{3}{16}k^2\right)}}$

A1 Ausführliche Lösung

d) Funktionswerte für die Grenzen des Definitionsbereichs.

Zu bestimmen ist: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_k(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim_{x \to -\infty}\left(e^{2x} - k \cdot e^x\right) = \lim_{x \to -\infty} e^{2x} - k \cdot \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 - k \cdot 0 = 0$$

Für $x \to -\infty$ ist die x – Achse Asymptote von $f_k(x)$

$$\lim_{x \to \infty} f_k(x) = \lim_{x \to \infty}\left(e^{2x} - k \cdot e^x\right) = \lim_{x \to \infty}\left[\left(e^x - k\right) \cdot e^x\right] = \infty$$

Für $x \to \infty$ wachsen die Funktionswerte von $f_k(x)$ über alle Grenzen

A1 Ausführliche Lösung

e) Die Fläche A_k zwischen den Achsenschnittpunkten.

Nullstelle: $x_1 = \ln(k) \Rightarrow$ Flächenintegral $A_k = \left| \int\limits_0^{\ln(k)} f_k(x)\,dx \right|$

$$\int\limits_0^{\ln(k)} f_k(x)\,dx = \int\limits_0^{\ln(k)} \left(e^{2x} - k\cdot e^x\right)dx = \underbrace{\int\limits_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx}_{I} - k\cdot \underbrace{\int\limits_0^{\ln(k)} e^x\,dx}_{II} = I - k\cdot II$$

$$I: \int\limits_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx \text{ Substitution: } u(x) = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

$$\text{ug: } u(0) = 2\cdot 0 = 0 \quad \text{og: } u(\ln(k)) = 2\cdot\ln(k)$$

$$\int\limits_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^{2\cdot\ln(k)} e^u\,du = \left[\frac{1}{2}e^u\right]_0^{2\cdot\ln(k)} = \frac{1}{2}e^{2\cdot\ln(k)} - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}$$

$$II: \int\limits_0^{\ln(k)} e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^{\ln(k)} = e^{\ln(k)} - e^0 = k - 1$$

$$\int\limits_0^{\ln(k)} f_k(x)\,dx = I - k\cdot II = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2} - k\cdot(k-1) = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2} - k^2 + k = -\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2}$$

Damit wird die Fläche zu: $\underline{\underline{A_k = \left| -\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2} \right|}}$

A1 Ausführliche Lösung

f) Wertetabelle und Kurvenschaar (Graphen)
Achsenschnittpunkte, Tiefpunkt und Wendepunkt sind zusätzlich zur Wertetabelle zu berechnen.

$$P_{k_y}(0\,|\,1-k); P_{k_x}(\ln(k)\,|\,0); P_{k_{Min}}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\Big|-\frac{1}{4}k^2\right); P_{k_w}\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\Big|-\frac{3}{16}k^2\right)$$

$k = 2$:

$$P_{2_y}(0\,|\,-1); P_{2_x}(\ln(2) \approx 0{,}69\,|\,0); P_{2_{Min}}\left(\ln\left(\frac{2}{2}\right) = 0\,|\,-1\right); P_{2_w}\left(\ln\left(\frac{2}{4}\right) \approx -0{,}69\,|\,-0{,}75\right)$$

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_2(x)$	−0,1	−0,16	−0,25	−0,37	−0,6	−0,85	−1	−0,58	1,95	11,1	21,6

A1 f) $k = 3$:

$$P_{3_y}(0\,|\,-2); P_{3_x}(\ln(3) \approx 1{,}1\,|\,0); P_{3_{Min}}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}41\,|\,-2{,}25\right); P_{3_w}\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0{,}29\,|\,-1{,}69\right)$$

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_3(x)$	−0,15	−0,24	−0,39	−0,62	−0,97	−1,45	−2	−2,23	−0,77	6,64	15,85

A1 f) $k = 4$:

$P_{4_y}\left(0\,|\,-3\right);P_{4_x}\left(\ln(4)\approx 1{,}39\,|\,0\right);P_{4_{Min}}\left(\ln\left(\frac{4}{2}\right)=0{,}69\,|\,-4\right);P_{4_w}\left(\ln\left(\frac{4}{4}\right)=0\,|\,-3\right)$

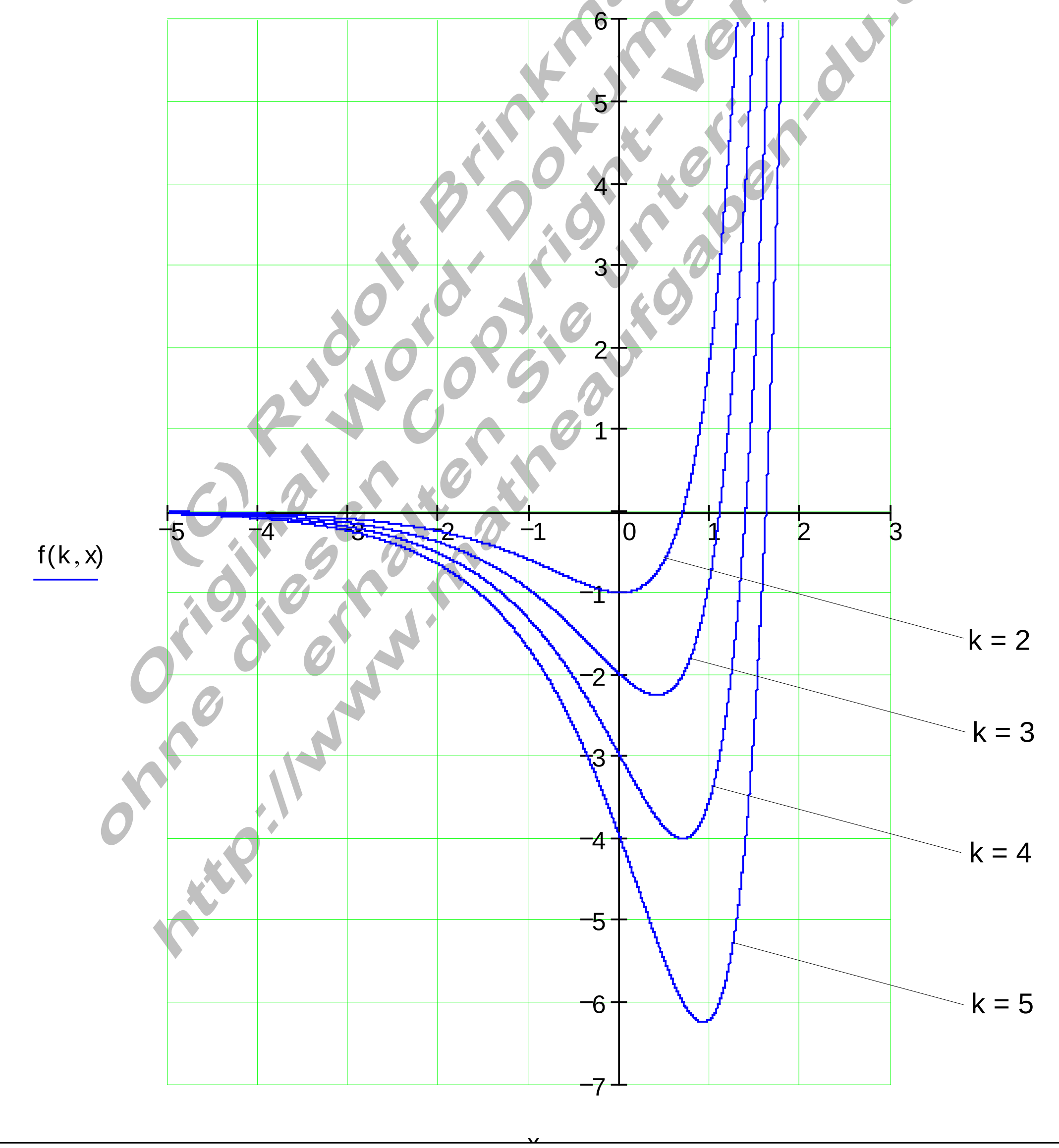
x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_4(x)$	−0,2	−0,32	−0,52	−0,84	−1,34	−2,06	−3	−3,88	−3,48	2,16	10,1

A1 f) $k = 5$:

$P_{5_y}\left(0\,|\,-4\right);P_{5_x}\left(\ln(5)\approx 1{,}61\,|\,0\right);P_{5_{Min}}\left(\ln\left(\frac{5}{2}\right)=0{,}92\,|\,-6{,}25\right);P_{5_w}\left(\ln\left(\frac{5}{4}\right)\approx 0{,}22\,|\,-4{,}69\right)$

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_5(x)$	−0,25	−0,4	−0,66	−1,07	−1,7	−2,67	−4	−5,53	−6,2	−2,32	4,34

A1 f)



A1	Ausführliche Lösung	
	g)	Berechnung der Ortskurve für die Tiefpunkte:

$$P_{k_{Min}}\left(\underbrace{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}_{x} \,\middle|\, \underbrace{-\frac{1}{4}k^2}_{y}\right) \Rightarrow x = \ln\left(\frac{k}{2}\right) \quad (1) \quad y = -\frac{1}{4}k^2 \quad (2)$$

(1) nach k auflösen:

$$x = \ln\left(\frac{k}{2}\right) \Big| e \quad \Leftrightarrow \quad e^x = e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \frac{k}{2} \quad \Leftrightarrow \quad k = 2\cdot e^x$$

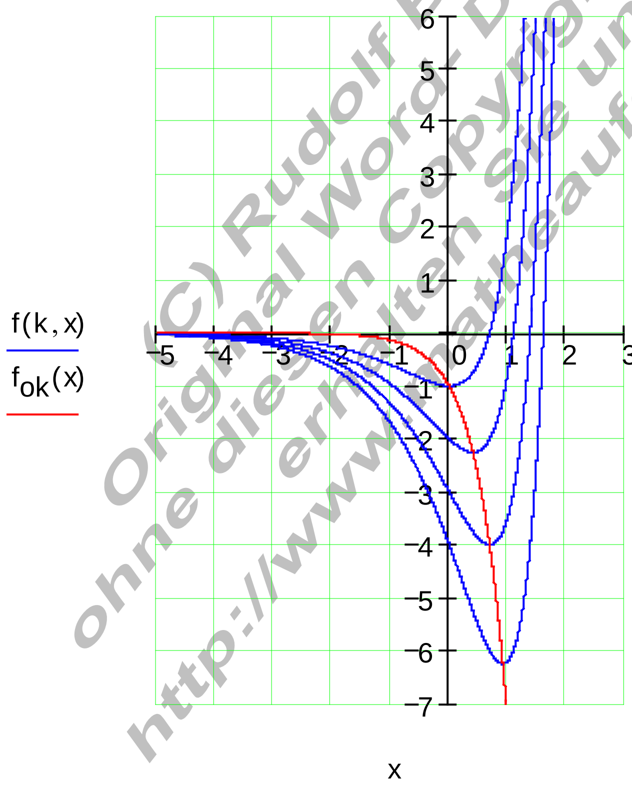
das Ergebnis in (2) einsetzen:

$$y = -\frac{1}{4}k^2 = -\frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot e^x\right)^2 = -\frac{1}{4}\cdot 4\cdot e^{2x} = -e^{2x}$$

Damit wird die Funktionsgleichung der Ortskurve für alle Tiefpunkte:

$$\underline{\underline{f_{ok}(x) = -e^{2x}}}$$

A1	Ausführliche Lösung	
	g)	



A1 Ausführliche Lösung

h) Fläche für k = 5:

$$A_k = \left| -\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2} \right| \qquad \text{Ergebnis aus e)}$$

$$A_5 = \left| -\frac{1}{2}\cdot 5^2 + 5 - \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{25}{2} + 5 - \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{25}{2} + \frac{10}{2} - \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{16}{2} \right| = \left| -8 \right| = 8$$

Die Fläche für k = 5 beträgt 8 FE.

A2 Ausführliche Lösung

a) Achsenschnittpunkte:

Schnittpunkt mit der y- Achse:

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$y_s = f_k(0) = \frac{1}{4}k\cdot e^0 - 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0} = \frac{k}{4} - 2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}\left(0 \mid \frac{k}{4} - 2\right)}}$$

Für alle $k \in \mathbb{R}$ existiert ein Schnittpunkt mit der $y-$Achse.

Schnittpunkt mit der x- Achse (Nullstelle):

$$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} = 0 \mid + 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^x = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} \mid \cdot \frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{8}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} \mid \ln(\,)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \ln\left(e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \frac{1}{2}\cdot\ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \frac{1}{2}x \mid -\frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right) \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0\right)}}$$

Für alle $k > 0$ existiert ein Schnittpunkt mit der $x-$Achse (Nullstelle).

A2	Ausführliche Lösung	
	b)	Die Ableitungen: $f_k\left(x\right)=\frac{1}{4}k\cdot e^x-2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ $f_k'\left(x\right)=\frac{1}{4}k\cdot e^x-2\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}=\frac{1}{4}k\cdot e^x-e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ $f_k''\left(x\right)=\frac{1}{4}k\cdot e^x-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ $f_k'''\left(x\right)=\frac{1}{4}k\cdot e^x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}=\frac{1}{4}k\cdot e^x-\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$

A2 Ausführliche Lösung

c) Extrempunkte:

$$f_k(x)=\frac{1}{4}k\cdot e^x-2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\qquad f_k'(x)=\frac{1}{4}k\cdot e^x-e^{\frac{1}{2}\cdot x}\qquad f_k''(x)=\frac{1}{4}k\cdot e^x-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

Hinreichende Bedingung für Extrempunkte: $f_k'(x)=0 \quad \wedge \quad f_k''(x)\neq 0$

$$f_k'(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^x-e^{\frac{1}{2}\cdot x}=0\,|+e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^x=e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,|\cdot\frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x=\frac{4}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right)=\ln\left(\frac{4}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right)=\ln\left(\frac{4}{k}\right)+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(e^x\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{4}{k}\right)+\frac{1}{2}x\,|-\frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x=\ln\left(\frac{4}{k}\right)|\cdot 2\quad\Leftrightarrow\quad x=2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)\text{ mögliche Extremstelle}$$

$$f_k''(x)=f_k''\left(2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)\right)=\frac{1}{4}k\cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)}-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)}=\frac{1}{4}k\cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)^2}-\frac{1}{2}\cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)}$$

$$=\frac{1}{4}k\cdot\left(\frac{4}{k}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{k}=\frac{1}{4}k\cdot\frac{16}{k^2}-\frac{2}{k}=\frac{4}{k}-\frac{2}{k}=\frac{2}{k}>0\text{ für }k>0$$

$\Rightarrow$ relatives Minimum (Tiefpunkt) bei $x=x_{k_{Min}}=2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)$

$$y_{k_{Min}}=f_k\left(x_{k_{Min}}\right)=\frac{1}{4}k\cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)}-2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)}=\frac{1}{4}k\cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)^2}-2\cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)}$$

$$=\frac{1}{4}k\cdot\left(\frac{4}{k}\right)^2-2\cdot\frac{4}{k}=\frac{1}{4}k\cdot\frac{16}{k^2}-\frac{8}{k}=\frac{4}{k}-\frac{8}{k}=-\frac{4}{k}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{k_{Min}}\left(2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)\Big|-\frac{4}{k}\right)}}$$

Für alle $k>0$ existiert ein relatives Minimum (Tiefpunkt).

A2	Ausführliche Lösung

d) Wendepunkte:

$$f_k(x)=\frac{1}{4}k\cdot e^x-2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\qquad f_k''(x)=\frac{1}{4}k\cdot e^x-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\qquad f_k'''(x)=\frac{1}{4}k\cdot e^x-\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

Hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $f_k''(x)=0 \quad\wedge\quad f_k'''(x)\neq 0$

$$f_k''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^x-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}=0 \,\Big|+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^x=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,\Big|\cdot\frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x=\frac{2}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,\Big|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right)=\ln\left(\frac{2}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right)=\ln\left(\frac{2}{k}\right)+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(e^x\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{2}{k}\right)+\frac{1}{2}x\,\Big|-\frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x=\ln\left(\frac{2}{k}\right)\Big|\cdot 2 \quad\Leftrightarrow\quad x=2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)\ \text{mögliche Wendestelle}$$

$$f_k'''(x)=f_k'''\left(2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)\right)=\frac{1}{4}k\cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)}-\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)}=\frac{1}{4}k\cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)^2}-\frac{1}{4}\cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)}$$

$$=\frac{1}{4}k\cdot\left(\frac{2}{k}\right)^2-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{k}\right)=\frac{1}{4}k\cdot\frac{4}{k^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}=\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}\neq 0\ \text{für}\ k>0$$

$$\Rightarrow x=x_{k_w}=2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)\ \text{ist eine Wendestelle}$$

$$y_{k_w}=f_k\left(x_{k_w}\right)=\frac{1}{4}k\cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)}-2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)}=\frac{1}{4}k\cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)^2}-2\cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)}$$

$$=\frac{1}{4}k\cdot\left(\frac{2}{k}\right)^2-2\cdot\left(\frac{2}{k}\right)=\frac{1}{4}k\cdot\frac{4}{k^2}-2\cdot\frac{2}{k}=\frac{1}{k}-\frac{4}{k}=\frac{1}{k}(1-4)=-\frac{3}{k}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{k_w}\left(2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)\Big|-\frac{3}{k}\right)}}$$

Für alle $k>0$ existiert ein Wendepunkt.

A2 Ausführliche Lösung

e) Funktionswerte für die Grenzen des Definitionsbereichs:

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty} e^x}_{\to 0} - 2 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{\to 0} = \frac{1}{4}k \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

Für $x \to -\infty$ streben alle Funktionswerte gegen 0.

Damit ist die $x-$Achse Asymptote.

$$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot \underbrace{\lim_{x\to\infty} e^x}_{\to \infty} - 2 \cdot \underbrace{\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{\to \infty} = \frac{1}{4}k \cdot \infty - 2 \cdot \infty \text{ ist so nicht lösbar.}$$

Da aber e^x für $x \to \infty$ schneller über alle Grenzen wächst als $e^{\frac{1}{2}\cdot x}$,
kann unter der Berücksichtigung der Subtraktion davon ausgegangen werden,
dass $\lim_{x\to\infty} f_k(x) = \infty$ gilt.

A2 Ausführliche Lösung

f) Die Ortskurve der Tiefpunkte:

$$P_{k_{Min}}\left(\underbrace{2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)}_{x} \,\Big|\, \underbrace{-\frac{4}{k}}_{y}\right) \Rightarrow x = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \quad (1) \quad y = -\frac{4}{k} \quad (2)$$

(1) nach k auflösen und in (2) einsetzen
ergibt die Funktionsgleichung der Oetskurve.

$$x = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) |:2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot x = \ln\left(\frac{4}{k}\right) |e^{(\,)} \quad \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}\cdot x} = e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\frac{1}{2}\cdot x} = \frac{4}{k} |\text{Kehrwert} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\frac{1}{2}\cdot x} = \frac{k}{4} |\cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad k = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x}$$

eingesetzt in (2):

$$y = -\frac{4}{k} = -\frac{4}{4 \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x}} = -\frac{4}{4} \cdot \frac{1}{e^{-\frac{1}{2}\cdot x}}$$

$$= -\frac{1}{e^{-\frac{1}{2}\cdot x}} = -e^{\frac{1}{2}\cdot x} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f_{ok}(x) = -e^{\frac{1}{2}\cdot x}}}$$

$f_{ok}(x)$ ist die Ortskurve der Tiefpunkte von $f_k(x)$

A2 Ausführliche Lösung

g) Flächenberechnung:

$f_k(x)=\frac{1}{4}k\cdot e^x-2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ Zu lösen ist das Integral $A_k=\left|\int\limits_0^{x_k} f_k(x)\,dx\right|$

$$\int f_k(x)\,dx=\frac{1}{4}k\cdot\int e^x\,dx-2\cdot\int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx$$

mit $\int e^x\,dx=e^x+C$ und $\int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx=2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+C$ gilt:

$$\int f_k(x)\,dx=\frac{1}{4}k\cdot e^x-2\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+C=\frac{1}{4}k\cdot e^x-4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+C$$

Nach einsetzen der Grenzen: $ug=0;\quad og=x_k=2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right)=\ln\left(\frac{8}{k}\right)^2$ wird:

$$\int\limits_0^{x_k} f_k(x)\,dx=\frac{1}{4}k\cdot e^{\ln\left(\frac{8}{k}\right)^2}-4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right)}-\left(\frac{1}{4}k\cdot e^0-4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0}\right)$$

$$=\frac{1}{4}k\cdot\left(\frac{8}{k}\right)^2-4\cdot\frac{8}{k}-\frac{1}{4}k+4=\frac{1}{4}k\cdot\frac{64}{k^2}-\frac{32}{k}-\frac{1}{4}k+4$$

$$=\frac{16}{k}-\frac{32}{k}-\frac{1}{4}k+4=\frac{1}{k}(16-32)-\frac{1}{4}k+4=-\frac{16}{k}-\frac{1}{4}k+4$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A_k=\left|-\frac{16}{k}-\frac{1}{4}k+4\right|}}$$

A2 Ausführliche Lösung

h) Markante Punkte und Graphen:

Markante Punkte:

$k=1$

$$P_{k_y}\left(0\,|\,\frac{1}{4}k-2\right)\Rightarrow P_{1_y}\left(0\,|\,\frac{1}{4}\cdot 1-2\right)\Rightarrow P_{1_y}(0\,|\,-1{,}75)$$

$$P_{k_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right)|\,0\right)\Rightarrow P_{1_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{1}\right)|\,0\right)\Rightarrow P_{1_x}(4{,}16\,|\,0)$$

$$x_{k_{Min}}=2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)\Rightarrow x_{1_{Min}}=2\cdot\ln\left(\frac{4}{1}\right)\approx 2{,}77\Rightarrow f_1\left(x_{1_{Min}}\right)=-4\Rightarrow P_{1_{Min}}(2{,}77\,|\,-4)$$

$$x_{k_w}=2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)\Rightarrow x_{1_w}=2\cdot\ln\left(\frac{2}{1}\right)\approx 1{,}39\Rightarrow f_1\left(x_{1_w}\right)=-3\Rightarrow P_{1_w}(1{,}39\,|\,-3)$$

A2	h)	$k = 2$ $P_{k_y}\left(0\,\middle|\,\frac{1}{4}k-2\right) \Rightarrow P_{2_y}\left(0\,\middle|\,\frac{1}{4}\cdot 2-2\right) \Rightarrow P_{2_y}(0\,\vert\,-1{,}5)$ $P_{k_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right)\,\middle|\,0\right) \Rightarrow P_{2_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{2}\right)\,\middle|\,0\right) \Rightarrow P_{2_x}(2{,}77\,\vert\,0)$ $x_{k_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{2_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{2}\right) \approx 1{,}39 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{Min}}\right) = -2 \Rightarrow P_{2_{Min}}(1{,}39\,\vert\,-2)$ $x_{k_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{2_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{2}\right) = 0 \Rightarrow f_2\left(x_{2_w}\right) = -1{,}5 \Rightarrow P_{2_w}(0\,\vert\,-1{,}5)$

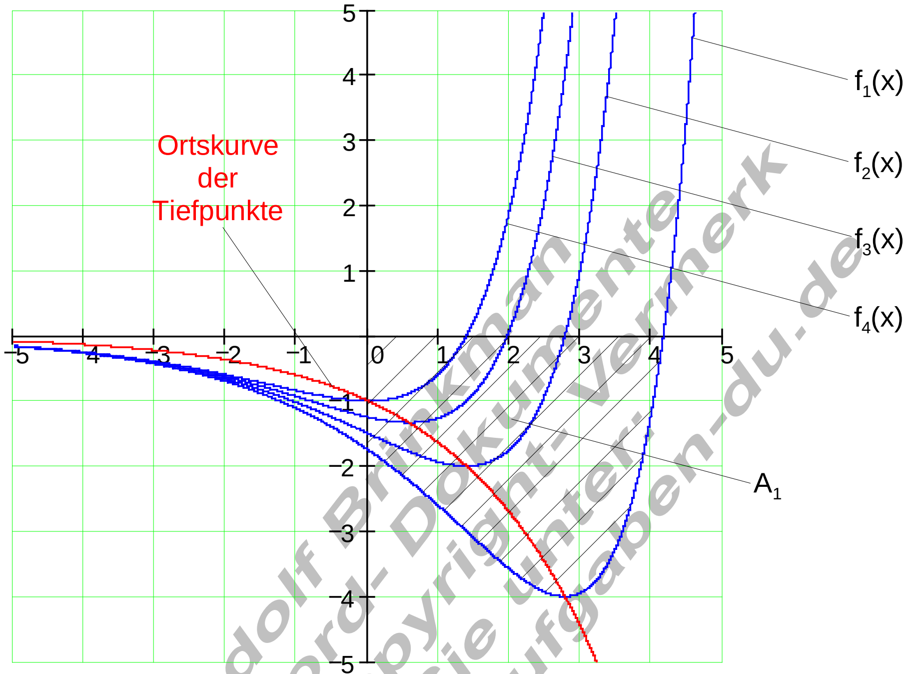
A2	h)	$k = 3$ $P_{k_y}\left(0\,\middle|\,\frac{1}{4}k-2\right) \Rightarrow P_{3_y}\left(0\,\middle|\,\frac{1}{4}\cdot 3-2\right) \Rightarrow P_{3_y}(0\,\vert\,-1{,}25)$ $P_{k_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right)\,\middle|\,0\right) \Rightarrow P_{3_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{3}\right)\,\middle|\,0\right) \Rightarrow P_{3_x}(1{,}96\,\vert\,0)$ $x_{k_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{3_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0{,}58 \Rightarrow f_3\left(x_{3_{Min}}\right) \approx -1{,}33$ $\Rightarrow P_{3_{Min}}(0{,}58\,\vert\,-1{,}33)$ $x_{k_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{3_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx -0{,}81 \Rightarrow f_3\left(x_{3_w}\right) = -1$ $\Rightarrow P_{3_w}(-0{,}81\,\vert\,-1)$

A2	h)	$k = 4$ $P_{k_y}\left(0\,\middle|\,\frac{1}{4}k-2\right) \Rightarrow P_{4_y}\left(0\,\middle|\,\frac{1}{4}\cdot 4-2\right) \Rightarrow P_{4_y}(0\,\vert\,-1)$ $P_{k_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right)\,\middle|\,0\right) \Rightarrow P_{4_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{4}\right)\,\middle|\,0\right) \Rightarrow P_{4_x}(1{,}39\,\vert\,0)$ $x_{k_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{4_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{4}\right) = 0 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{Min}}\right) = -1$ $\Rightarrow P_{4_{Min}}(0\,\vert\,-1)$ $x_{k_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{4_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{4}\right) \approx -1{,}39 \Rightarrow f_4\left(x_{4_w}\right) = -0{,}75$ $\Rightarrow P_{4_w}(-1{,}39\,\vert\,-0{,}75)$

A2	h)	Die Graphen:

$$f(k,x) := \frac{1}{4}\cdot k\cdot e^{x} - 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} \qquad f_{ok}(x) := -e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

Ortskurve für Tiefpunkte



A2	Ausführliche Lösung

i) Konkrete Fläche:

$$A_k = \left| -\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4 \right| \text{ für } k = 1 \text{ gilt:}$$

$$A_1 = \left| -\frac{16}{1} - \frac{1}{4}\cdot 1 + 4 \right| = \left| -16 + 4 - \frac{1}{4} \right| = \left| -12 - \frac{1}{4} \right| = \left| -12,25 \right| = \underline{\underline{12,25\,\text{FE}}}$$