Analysis- Formelsammlung mit einfachen Beispielen

Binomische Formeln	
Binomische Formel	Beispiel
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x_0 + \Delta x)^2 = x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{16}$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(2x+1)(2x-1) = 4x^2 - 1$

Potenzgesetze	
Potenzgesetz	Beispiele
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$ oder $3x^2 \cdot 4x^3 = 3 \cdot 4 \cdot x^{3+2} = 12x^5$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$ oder $\frac{2x^6}{3x^2} = \frac{2}{3} \cdot x^{6-2} = \frac{2}{3}x^4$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$u^3 \cdot v^3 = (u \cdot v)^3$ oder $2x^4 \cdot 3y^4 = 2 \cdot 3 \cdot (x \cdot y)^4 = 6(xy)^4$
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{u^4}{v^4} = \left(\frac{u}{v}\right)^4$ oder $\frac{3x^5}{4y^5} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^5$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(x^3)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$ oder $(3x^3)^2 = 3^2 \cdot x^{3 \cdot 2} = 9x^6$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{3}{2}}$ oder $\sqrt[3]{8 \cdot u^4} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{u^4} = 2 \cdot u^{\frac{4}{3}}$
$a^0 = 1$	$x^0 = 1$ oder $(x^2 - 4u + 5)^0 = 1$ oder $e^0 = 1$
$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ oder $\frac{2a}{y^4} = 2a \cdot y^{-4}$ oder $3x^{-(a+1)} = \frac{3}{x^{a+1}}$

Logarithmengesetze zur Basis e	
Logarithmusdefinition: $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b)$ speziell: $e^x = b \Leftrightarrow x = \ln(b)$	
Logarithmengesetz	Beispiele
$\ln(b \cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$	$\ln(4 \cdot x) = \ln(4) + \ln(x)$
$\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$	$\ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln(x) - \ln(2)$
$\ln(b^c) = c \cdot \ln(b)$	$\ln(x^3) = 3 \cdot \ln(x)$
$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a}$	$\log_2 5 = \frac{\lg 5}{\lg 2} = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2{,}322$
$a = e^{\ln(a)}$	$e^{\ln(x+2)} = x + 2$
$e^0 = 1$	$e^{(x^2 - x^2)} = e^0 = 1$
$\ln(1) = 0$	$\ln(e^0) = \ln(1) = 0$
$\ln(e) = 1$	$\ln(x - e - x) = \ln(e) = 1$

p – q – Formel

Normalform: $x^2 + px + q = 0$	$2x^2 - 4x - 6 = 0 \mid :2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$
Diskriminante: $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$	$p = -2; q = -3$
Lösungsformel: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$	$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{4} = 2$
	$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$ $\quad x_1 = 1 + 2 = 3$; $x_2 = 1 - 2 = -1$

Steigung einer Geraden durch 2 Punkte

$f(x) = a_1x + a_0 \qquad P_1(x_1 \mid y_1); P_2(x_2 \mid y_2) \Rightarrow a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Beispiel:

$$P_1\left(\underbrace{2}_{x_1} \mid \underbrace{-1}_{y_1}\right); P_2\left(\underbrace{-3}_{x_2} \mid \underbrace{1}_{y_2}\right) \Rightarrow a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-1)}{-3 - 2} = -\frac{2}{5}$$

Orthogonale Geraden

Für die Steigung zweier senkrecht aufeinander stehender Geraden g und h gilt:

$$a_{1g} \cdot a_{1h} = -1 \qquad \text{bzw.} \qquad a_{1g} = -\frac{1}{a_{1h}}$$

Beispiel: $a_{1g} = -\frac{2}{5}$ sei die Steigung der Geraden g

Gesucht wird nun die Steigung der zu g senkrecht verlaufenden Geraden h

$$a_{1h} = -\frac{1}{a_{1g}} = -\frac{1}{-\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}$$

Quadratische Funktionen

$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad S(x_s \mid y_s) \qquad f(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s$

x_1 und x_2 seien Nullstellen von $f(x)$ dann gilt: $\quad f(x) = a_2(x - x_1)(x - x_2)$

und für die Scheitelpunkt gilt: $\quad x_s = \frac{x_1 + x_2}{2}; y_s = f(x_s)$

Beispiel:

$f(x) = 2x^2 - 4x - 6 \Rightarrow$ Nullstellen: $x_1 = 3; x_2 = -1$

$f(x) = 2(x - 3)(x + 1)$ Produkt aus Linearfaktoren

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1; y_s = f(x_s) = f(1) = 2 - 4 - 6 = -8$$

Scheitelpunkt: $S(1 \mid -8)$ Scheitelpunktform: $f(x) = 2(x - 1)^2 - 8$

Tangente und Normale

Tangente und Normale an den Graphen von $f(x)$ durch den Punkt $P\left(x_0 \mid f(x_0)\right)$

Gleichung der Tangente

$$t(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Steigung}}(x - x_0) + f(x_0)$$

Gleichung der Normalen

$$n(x) = \underbrace{-\frac{1}{f'(x_0)}}_{\text{Steigung}}(x - x_0) + f(x_0); \quad f'(x_0) \neq 0$$

Beispiel: $f(x) = -x^4 + 2x^3 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 6x^2$

$P(1|1) \Rightarrow x_0 = 1$ und $f(x_0) = f(1) = 1$ sowie $f'(x_0) = f'(1) = 2$

Tangente: $t(x) = 2(x-1) + 1 = \underline{\underline{2x-1}}$

Normale: $n(x) = -\frac{1}{2}(x-1) + 1 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}}$

Differential - und Integralrechnung

Funktion	Ableitung	Stammfunktion
$f(x)$	$f'(x)$	$F(x) = \int f(x)\,dx$
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$\int k\,dx = k \cdot x + C$
$f(x) = 5$	$f'(x) = 0$	$\int 5\,dx = 5 \cdot x + C$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2 \cdot x$	$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C \quad (n \neq -1)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
$f(x) = 2e^x$	$f'(x) = 2e^x$	$\int 2e^x\,dx = 2e^x + C$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$	$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln(a)}a^x + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
$f(x) = 3^x$	$f'(x) = 3^x \cdot \ln(3)$	$\int 3^x\,dx = \frac{1}{\ln(3)}3^x + C$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$\int \ln(x)\,dx = x \cdot \ln(x) - x + C \quad (x > 0)$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C \quad (x \neq 0)$

Regeln zur Differenzialrechnung	
Produktregel	$f(x)=u(x)\cdot v(x) \quad\Rightarrow\quad f'=u'\cdot v+u\cdot v'$ Beispiel: $f(x)=2x\cdot\left(x^2-1\right)\Rightarrow u=2x;u'=2;v=x^2-1;v'=2x$ $f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=2\cdot\left(x^2-1\right)+2x\cdot 2x=\underline{\underline{6x^2-2}}$
Quotientenregel	$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \quad\Rightarrow\quad f'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ Beispiel: $f(x)=\frac{e^x}{x}\Rightarrow u=e^x;u'=e^x;v=x;v'=1;v^2=x^2$ $f'(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}=\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\underline{\underline{\left(\frac{x-1}{x^2}\right)e^x}}$
Kettenregel	$f(x)=f\left[z(x)\right] \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\underbrace{f'(z)}_{\text{äußere Ableitung}}\cdot\underbrace{z'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$ Beispiel: $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\Rightarrow f'(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\underline{\underline{-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}}}$

Integration durch Substitution

$f(x)=e^{2x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{2x}\,dx=?$

Substitution: $u(x)=2x=u$ bilde $u'(x)=\frac{du}{dx}=2\Rightarrow dx=\frac{du}{2}$

$\int f(x)\,dx=\int e^u\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^u\,du=\frac{1}{2}e^u+C$

Zurücksubstitution: $\frac{1}{2}e^u+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$ also: $F(x)=\int(x)\,dx=\int e^{2x}dx=\underline{\underline{\frac{1}{2}e^{2x}+C}}$

Partielle Integration

$f(x)=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx=u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)\cdot v(x)\,dx$

Beispiel:

$\int\underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^x}_{v'}\,dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\,dx$

$u=x\Rightarrow u'=1$

$v'=e^x\Rightarrow v=\int e^x\,dx=e^x$

$\int x\cdot e^x\,dx=x\cdot e^x-\int 1\cdot e^x\,dx=x\cdot e^x-e^x+C=\underline{\underline{(x-1)e^x+C}}$