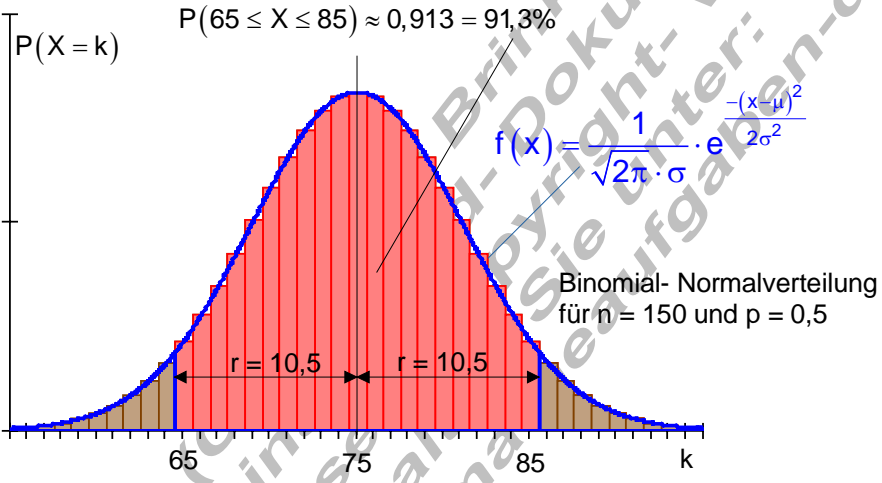


Wahrscheinlichkeiten für $\sigma$ -Umgebungen normalverteilter Zufallsvariablen $P = P(\mu - z \cdot \sigma \leq X \leq \mu + z \cdot \sigma)$ falls $\sigma > 3$ Laplace- Bedingung											
z	P	z	P	z	P	z	P	z	P	z	P
0,01	0,008	0,51	0,390	1,01	0,688	1,51	0,869	2,01	0,956	2,51	0,988
0,02	0,016	0,52	0,397	1,02	0,692	1,52	0,871	2,02	0,957	2,52	0,988
0,03	0,024	0,53	0,404	1,03	0,697	1,53	0,874	2,03	0,958	2,53	0,989
0,04	0,032	0,54	0,411	1,04	0,702	1,54	0,876	2,04	0,959	2,54	0,989
0,05	0,040	0,55	0,418	1,05	0,706	1,55	0,879	2,05	0,960	2,55	0,989
0,06	0,048	0,56	0,425	1,06	0,711	1,56	0,881	2,06	0,961	2,56	0,990
0,07	0,056	0,57	0,431	1,07	0,715	1,57	0,884	2,07	0,962	2,57	0,990
0,08	0,064	0,58	0,438	1,08	0,720	1,58	0,886	2,08	0,962	2,58	0,990
0,09	0,072	0,59	0,445	1,09	0,724	1,59	0,888	2,09	0,963	2,59	0,990
0,10	0,080	0,60	0,451	1,10	0,729	1,60	0,890	2,10	0,964	2,60	0,991
0,11	0,088	0,61	0,458	1,11	0,733	1,61	0,893	2,11	0,965	2,61	0,991
0,12	0,096	0,62	0,465	1,12	0,737	1,62	0,895	2,12	0,966	2,62	0,991
0,13	0,103	0,63	0,471	1,13	0,742	1,63	0,897	2,13	0,967	2,63	0,991
0,14	0,111	0,64	0,478	1,14	0,746	1,64	0,899	2,14	0,968	2,64	0,992
0,15	0,119	0,65	0,484	1,15	0,750	1,65	0,901	2,15	0,968	2,65	0,992
0,16	0,127	0,66	0,491	1,16	0,754	1,66	0,903	2,16	0,969	2,66	0,992
0,17	0,135	0,67	0,497	1,17	0,758	1,67	0,905	2,17	0,970	2,67	0,992
0,18	0,143	0,68	0,503	1,18	0,762	1,68	0,907	2,18	0,971	2,68	0,993
0,19	0,151	0,69	0,510	1,19	0,766	1,69	0,909	2,19	0,971	2,69	0,993
0,20	0,159	0,70	0,516	1,20	0,770	1,70	0,911	2,20	0,972	2,70	0,993
0,21	0,166	0,71	0,522	1,21	0,774	1,71	0,913	2,21	0,973	2,71	0,993
0,22	0,174	0,72	0,528	1,22	0,778	1,72	0,915	2,22	0,974	2,72	0,993
0,23	0,182	0,73	0,535	1,23	0,781	1,73	0,916	2,23	0,974	2,73	0,994
0,24	0,190	0,74	0,541	1,24	0,785	1,74	0,918	2,24	0,975	2,74	0,994
0,25	0,197	0,75	0,547	1,25	0,789	1,75	0,920	2,25	0,976	2,75	0,994
0,26	0,205	0,76	0,553	1,26	0,792	1,76	0,922	2,26	0,976	2,76	0,994
0,27	0,213	0,77	0,559	1,27	0,796	1,77	0,923	2,27	0,977	2,77	0,994
0,28	0,221	0,78	0,565	1,28	0,799	1,78	0,925	2,28	0,977	2,78	0,995
0,29	0,228	0,79	0,570	1,29	0,803	1,79	0,927	2,29	0,978	2,79	0,995
0,30	0,236	0,80	0,576	1,30	0,806	1,80	0,928	2,30	0,979	2,80	0,995
0,31	0,243	0,81	0,582	1,31	0,810	1,81	0,930	2,31	0,979	2,81	0,995
0,32	0,251	0,82	0,588	1,32	0,813	1,82	0,931	2,32	0,980	2,82	0,995
0,33	0,259	0,83	0,593	1,33	0,816	1,83	0,933	2,33	0,980	2,83	0,995
0,34	0,266	0,84	0,599	1,34	0,820	1,84	0,934	2,34	0,981	2,84	0,995
0,35	0,274	0,85	0,605	1,35	0,823	1,85	0,936	2,35	0,981	2,85	0,996
0,36	0,281	0,86	0,610	1,36	0,826	1,86	0,937	2,36	0,982	2,86	0,996
0,37	0,289	0,87	0,616	1,37	0,829	1,87	0,939	2,37	0,982	2,87	0,996
0,38	0,296	0,88	0,621	1,38	0,832	1,88	0,940	2,38	0,983	2,88	0,996
0,39	0,303	0,89	0,627	1,39	0,835	1,89	0,941	2,39	0,983	2,89	0,996
0,40	0,311	0,90	0,632	1,40	0,838	1,90	0,943	2,40	0,984	2,90	0,996
0,41	0,318	0,91	0,637	1,41	0,841	1,91	0,944	2,41	0,984	2,91	0,996
0,42	0,326	0,92	0,642	1,42	0,844	1,92	0,945	2,42	0,984	2,92	0,996
0,43	0,333	0,93	0,648	1,43	0,847	1,93	0,946	2,43	0,985	2,93	0,997
0,44	0,340	0,94	0,653	1,44	0,850	1,94	0,948	2,44	0,985	2,94	0,997
0,45	0,347	0,95	0,658	1,45	0,853	1,95	0,949	2,45	0,986	2,95	0,997
0,46	0,354	0,96	0,663	1,46	0,856	1,96	0,950	2,46	0,986	2,96	0,997
0,47	0,362	0,97	0,668	1,47	0,858	1,97	0,951	2,47	0,986	2,97	0,997
0,48	0,369	0,98	0,673	1,48	0,861	1,98	0,952	2,48	0,987	2,98	0,997
0,49	0,376	0,99	0,678	1,49	0,864	1,99	0,953	2,49	0,987	2,99	0,997
0,50	0,383	1,00	0,683	1,50	0,866	2,00	0,954	2,50	0,988	3,00	0,997

## Umgang mit der Tabelle normalverteilter Zufallsvariablen Intervalle und Wahrscheinlichkeiten

<b>B1</b>	<p>Intervall ist symmetrisch zum Erwartungswert.</p> <p><math>n = 150 ; p = 0,5 ; P(65 \leq X \leq 85)</math></p> <p> <math>n = 150</math>   <math>\mu = n \cdot p = 150 \cdot 0,5 = 75</math>  <math>p = 0,5</math>   <math>\Rightarrow \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{75 \cdot 0,5} = \sqrt{37,5} \approx 6,124 &gt; 3</math> </p> <p>[ ... { 65 ... 75 ... 85 } ... ] (symmetrisches Intervall um den Erwartungswert)</p> <p><math>P(65 \leq X \leq 85) = P(64,5 \leq X \leq 85,5)</math> für die Normalverteilung</p> <p>Umgebungsradius <math>r = 85,5 - 75 = 10,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{10,5}{\sqrt{37,5}} \Rightarrow r \approx 1,71 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1,71</math></p> <p>Tabellenwert für <math>z = 1,71</math> ist <math>0,913 \Leftrightarrow P(65 \leq X \leq 85) \approx \underline{\underline{0,913}}</math></p>
	 <p style="text-align: center;"><math>P(65 \leq X \leq 85) \approx 0,913 = 91,3\%</math></p> <p style="text-align: center;"><math>f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}</math></p> <p style="text-align: center;">Binomial- Normalverteilung für <math>n = 150</math> und <math>p = 0,5</math></p>

**B2** Intervall für höchstens k Erfolge

$$n = 150 ; p = 0,5 ; P(X \leq 65)$$

$$\begin{array}{l} n = 150 \\ p = 0,5 \end{array} \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \mu = n \cdot p = 150 \cdot 0,5 = 75 \\ \Rightarrow \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{75 \cdot 0,5} = \sqrt{37,5} \approx 6,124 > 3 \end{array} \right.$$

$$[ \{ 0 \dots 65 \} \{ 66 \dots 75 \dots 84 \} \{ 85 \dots 150 \} ]$$

$$P(X \leq 65) = \frac{1}{2} [1 - P(66 \leq X \leq 84)]$$

Nebenrechnung:

$$1 - P(66 \leq X \leq 84) = P(X \leq 65) + P(X \geq 85)$$

$$\text{Aus Symmetriegründen ist aber } P(X \leq 65) = P(X \geq 85)$$

$$\text{und damit } 1 - P(66 \leq X \leq 84) = 2 \cdot P(X \leq 65) | : 2$$

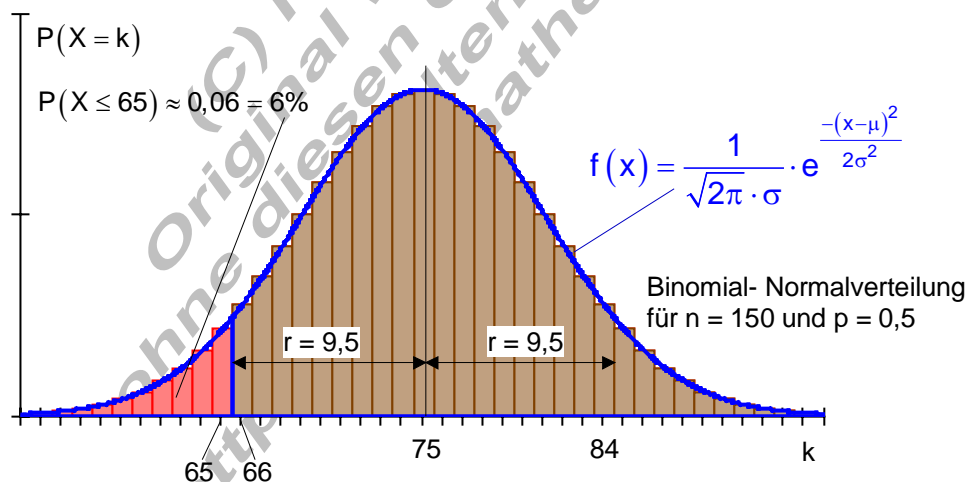
$$\Leftrightarrow P(X \leq 65) = \frac{1}{2} [1 - P(66 \leq X \leq 84)]$$

$$P(66 \leq X \leq 84) = P(65,5 \leq X \leq 84,5) \text{ für die Normalverteilung}$$

$$\text{Umgebungsradius } r = 84,5 - 75 = 9,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{9,5}{\sqrt{37,5}} \Rightarrow r \approx 1,55 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1,55$$

$$\text{Tabellenwert für } z = 1,55 \text{ ist } 0,879 \Leftrightarrow P(66 \leq X \leq 84) \approx 0,879$$

$$P(X \leq 65) = \frac{1}{2} [1 - P(66 \leq X \leq 84)] \approx \frac{1}{2} [1 - 0,879] = \underline{\underline{0,06}}$$



**B3** Intervall für mindestens k Erfolge

$$n = 150 ; p = 0,5 ; P(X \geq 85)$$

$$\begin{array}{l} n = 150 \\ p = 0,5 \end{array} \left| \begin{array}{l} \mu = n \cdot p = 150 \cdot 0,5 = 75 \\ \Rightarrow \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{75 \cdot 0,5} = \sqrt{37,5} \approx 6,124 > 3 \end{array} \right.$$

[ { 0 ... 65 } { 66 ... 75 ... 84 } { 85 ... 150 } ]

$$P(X \geq 85) = \frac{1}{2} [1 - P(66 \leq X \leq 84)]$$

Nebenrechnung:

$$1 - P(66 \leq X \leq 84) = P(X \leq 65) + P(X \geq 85)$$

Aus Symmetriegründen ist aber  $P(X \leq 65) = P(X \geq 85)$

und damit  $1 - P(66 \leq X \leq 84) = 2 \cdot P(X \geq 85) | : 2$

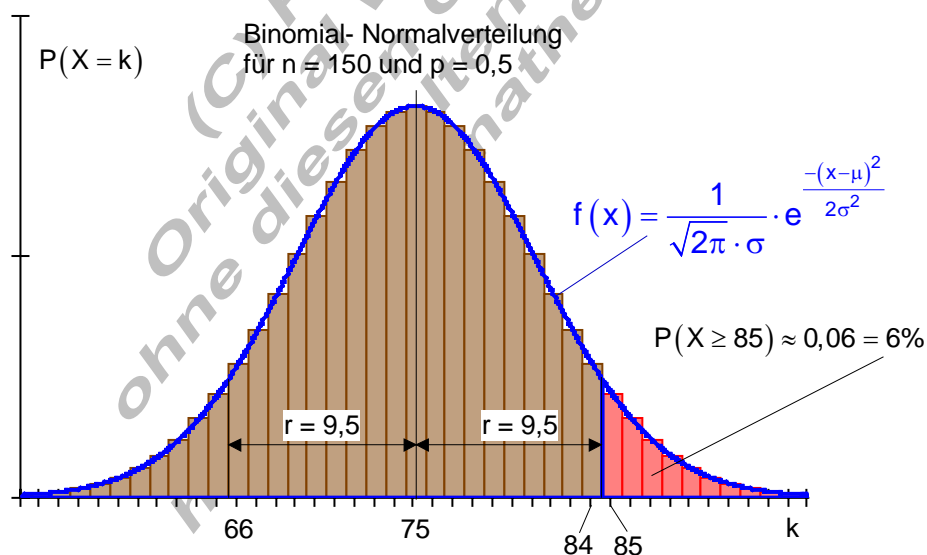
$$\Leftrightarrow P(X \geq 85) = \frac{1}{2} [1 - P(66 \leq X \leq 84)]$$

$P(66 \leq X \leq 84) = P(65,5 \leq X \leq 84,5)$  für die Normalverteilung

$$\text{Umgebungsradius } r = 84,5 - 75 = 9,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{9,5}{\sqrt{37,5}} \Rightarrow r \approx 1,55 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1,55$$

Tabellenwert für  $z = 1,55$  ist  $0,879 \Leftrightarrow P(66 \leq X \leq 84) \approx 0,879$

$$P(X \geq 85) = \frac{1}{2} [1 - P(66 \leq X \leq 84)] \approx \frac{1}{2} [1 - 0,879] = \underline{\underline{0,06}}$$



**B4** Intervall ist nicht symmetrisch zum Erwartungswert.

$$n = 150; p = 0,5; P(65 \leq X \leq 80)$$

$$\begin{array}{l} n = 150 \\ p = 0,5 \end{array} \left| \begin{array}{l} \mu = n \cdot p = 150 \cdot 0,5 = 75 \\ \Rightarrow \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{75 \cdot 0,5} = \sqrt{37,5} \approx 6,124 > 3 \end{array} \right.$$

$$[ \dots \{ 65 \dots 69 \} \{ 70 \dots 75 \dots 80 \} \{ 81 \dots 85 \} \dots ]$$

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } P(65 \leq X \leq 80) &= P(65 \leq X \leq 69) + P(70 \leq X \leq 80) \\ &= \frac{1}{2} [P(65 \leq X \leq 85) + P(70 \leq X \leq 80)] \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$P(65 \leq X \leq 85) - P(70 \leq X \leq 80) = P(65 \leq X \leq 69) + P(81 \leq X \leq 85)$$

$$\text{Aus Symmetriegründen ist aber } P(65 \leq X \leq 69) = P(81 \leq X \leq 85)$$

$$\text{und damit } P(65 \leq X \leq 85) - P(70 \leq X \leq 80) = 2 \cdot P(65 \leq X \leq 69) \quad | :2$$

$$\Leftrightarrow P(65 \leq X \leq 69) = \frac{1}{2} [P(65 \leq X \leq 85) - P(70 \leq X \leq 80)]$$

$$P(65 \leq X \leq 80) = P(65 \leq X \leq 69) + P(70 \leq X \leq 80)$$

$$= \frac{1}{2} [P(65 \leq X \leq 85) - P(70 \leq X \leq 80)] + P(70 \leq X \leq 80)$$

$$= \frac{1}{2} [P(65 \leq X \leq 85) + P(70 \leq X \leq 80)]$$

$$P(65 \leq X \leq 85) = P(64,5 \leq X \leq 85,5) \text{ für die Normalverteilung}$$

$$\text{Umgebungsradius } r = 85,5 - 75 = 10,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{10,5}{\sqrt{37,5}} \Rightarrow r \approx 1,71 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1,71$$

$$\text{Tabellenwert für } z = 1,71 \text{ ist } 0,913 \Leftrightarrow P(65 \leq X \leq 85) \approx 0,913$$

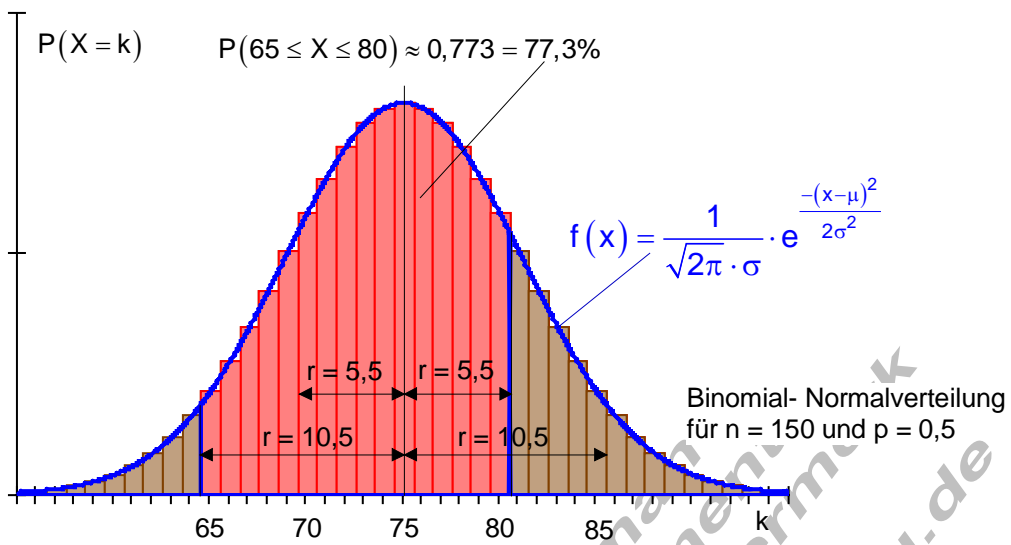
$$P(70 \leq X \leq 80) = P(69,5 \leq X \leq 80,5) \text{ für die Normalverteilung}$$

$$\text{Umgebungsradius } r = 80,5 - 75 = 5,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{5,5}{\sqrt{37,5}} \Rightarrow r \approx 0,9 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 0,9$$

$$\text{Tabellenwert für } z = 0,9 \text{ ist } 0,632 \Leftrightarrow P(70 \leq X \leq 80) \approx 0,632$$

$$P(65 \leq X \leq 80) = \frac{1}{2} [P(65 \leq X \leq 85) + P(70 \leq X \leq 80)] \approx \frac{1}{2} [0,913 + 0,632] = \underline{\underline{0,773}}$$

B4 Intervall ist nicht symmetrisch zum Erwartungswert.



(C) Rudolf Brinkmann  
Original Word- Dokument- Vermittlung  
ohne diesen Copyright- Vermerk  
http://www.matheaufgaben-du.de

**B5** Berechnung des Radius einer Umgebung bei vorgegebener Umgebungswahrscheinlichkeit.

$n = 150$  ;  $p = 0,5$  ; 90% – Umgebung : [ ... { ? ... 75 ... ? } ... ]

$$\begin{array}{l|l} n = 150 & \mu = n \cdot p = 150 \cdot 0,5 = 75 \\ p = 0,5 & \Rightarrow \sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{75 \cdot 0,5} = \sqrt{37,5} \approx 6,124 > 3 \end{array}$$

$z = 1,64$  (Tabellenwert für 90% – Umgebung)

Umgebungsradius:  $r = z \cdot \sigma = 1,64 \cdot 6,124 \approx 10,043$

Untere Grenze:  $\mu - r = 75 - 10,043 \approx 64,957$

Obere Grenze:  $\mu + r = 75 + 10,043 \approx 85,043$

Überlegung zur Rundung:

Die 90% – Umgebung soll symmetrisch zum Erwartungswert liegen.

Rundung: [ ... { 65 ... 75 ... 85 } ... ] Intervall ist symmetrisch zum Erwartungswert.

$P(65 \leq X \leq 85) = P(64,5 \leq X \leq 85,5)$  für die Normalverteilung

$$\text{Umgebungsradius } r = 85,5 - 75 = 10,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{10,5}{\sqrt{37,5}} \Rightarrow r \approx 1,71 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1,71$$

Tabellenwert für  $z = 1,71$  ist  $0,913 \Leftrightarrow P(65 \leq X \leq 85) \approx 0,913 = 91,3\%$

Kontrolle, ob ein besserer Wert möglich:

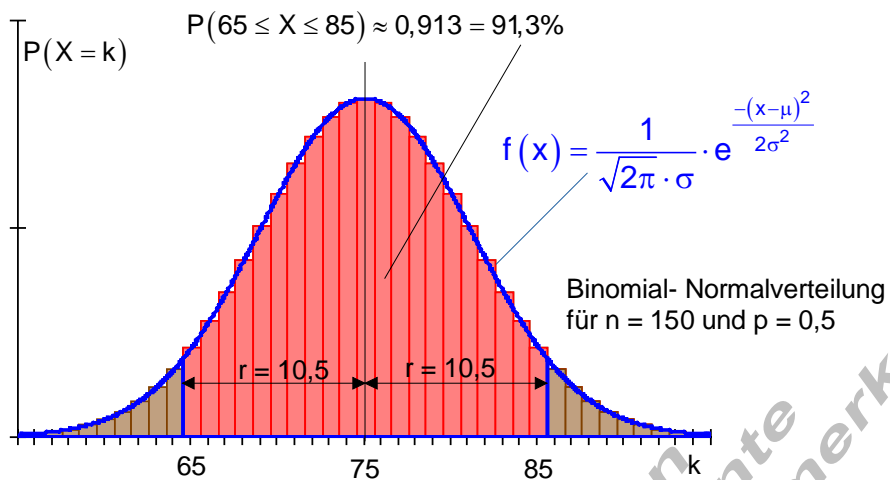
[ ... { 66 ... 75 ... 84 } ... ] Intervallverkleinerung

$P(66 \leq X \leq 84) = P(65,5 \leq X \leq 84,5)$  für die Normalverteilung

$$\text{Umgebungsradius } r = 84,5 - 75 = 9,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{9,5}{\sqrt{37,5}} \Rightarrow r \approx 1,55 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1,55$$

Tabellenwert für  $z = 1,55$  ist  $0,879 \Leftrightarrow P(66 \leq X \leq 84) \approx 0,879 = 87,9\%$

$P(65 \leq X \leq 85) \approx 0,913 = 91,3\%$  ist der beste Wert.

**B5** Berechnung des Radius einer Umgebung bei vorgegebener Umgebungswahrscheinlichkeit.

(C) Rudolf Brinkmann  
Original Word- Dokumente  
ohne diesen Copyright- Vermerk  
<http://www.matheaufgaben-du.de>



B6 Zur Berechnung anderer Umgebungswahrscheinlichkeiten verfährt man in ähnlicher Weise. (Hier 95%- Umgebung)

$n = 150$ ;  $p = 0,5$ ; 95% – Umgebung: [... { ? ... 75 ... ? } ...]

$$\begin{array}{l|l} n = 150 & \mu = n \cdot p = 150 \cdot 0,5 = 75 \\ p = 0,5 & \Rightarrow \sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{75 \cdot 0,5} = \sqrt{37,5} \approx 6,124 > 3 \end{array}$$

$z = 1,96$  (Tabellenwert für 95% –Umgebung)

Umgebungsradius:  $r = z \cdot \sigma = 1,96 \cdot 6,124 \approx 12,00$

Untere Grenze:  $\mu - r = 75 - 12 \approx 63$

Obere Grenze:  $\mu + r = 75 + 12 \approx 87$

Überlegung zur Rundung:

Die 95% –Umgebung soll symmetrisch zum Erwartungswert liegen.

Rundung: [ ... { 63 ... 75 ... 87 } ... ] Intervall ist symmetrisch zum Erwartungswert.

$P(63 \leq X \leq 87) = P(62,5 \leq X \leq 87,5)$  für die Normalverteilung

$$\text{Umgebungsradius } r = 87,5 - 75 = 12,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{12,5}{\sqrt{37,5}} \Rightarrow r \approx 2,04 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 2,04$$

Tabellenwert für  $z = 2,04$  ist  $0,959 \Leftrightarrow P(63 \leq X \leq 87) \approx 0,959 = 95,9\%$

Kontrolle, ob ein besserer Wert möglich:

[ ... { 64 ... 75 ... 86 } ... ] Intervallverkleinerung

$P(64 \leq X \leq 86) = P(63,5 \leq X \leq 86,5)$  für die Normalverteilung

$$\text{Umgebungsradius } r = 84,5 - 75 = 11,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{11,5}{\sqrt{37,5}} \Rightarrow r \approx 1,88 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1,88$$

Tabellenwert für  $z = 1,88$  ist  $0,94 \Leftrightarrow P(64 \leq X \leq 86) \approx 0,94 = 94\%$

$P(63 \leq X \leq 87) \approx 0,959 = 95,9\%$  ist der beste Wert.