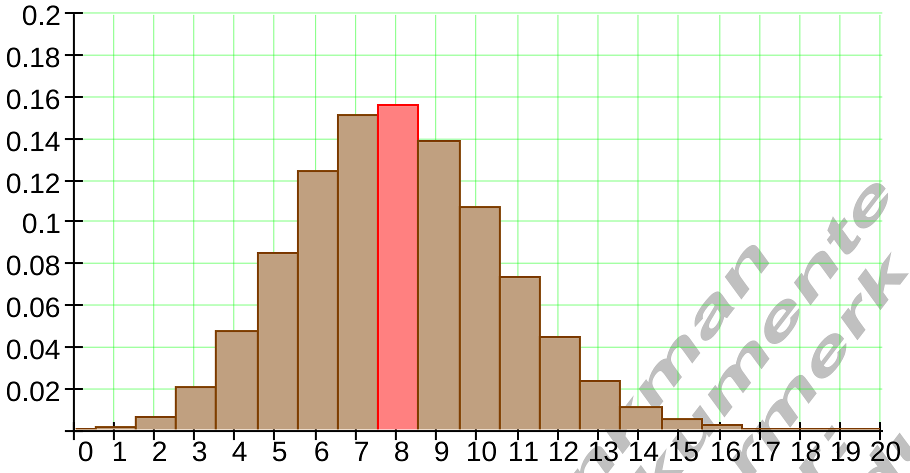
Erwartungswert, Umgebungswahrscheinlichkeiten und die Normalverteilung

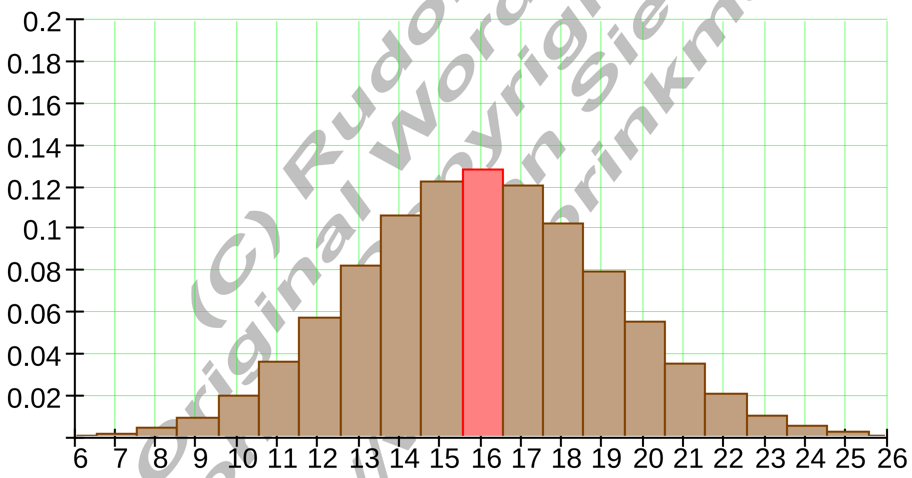
Erwartungswert binomialverteilter Zufallsgrößen

Wird ein Bernoulli- Versuch, bei dem die Trefferwahrscheinlichkeit **p = 0,2** ist, **n = 40** mal durchgeführt, dann erwarten wir im Mittel **8 Treffer**.



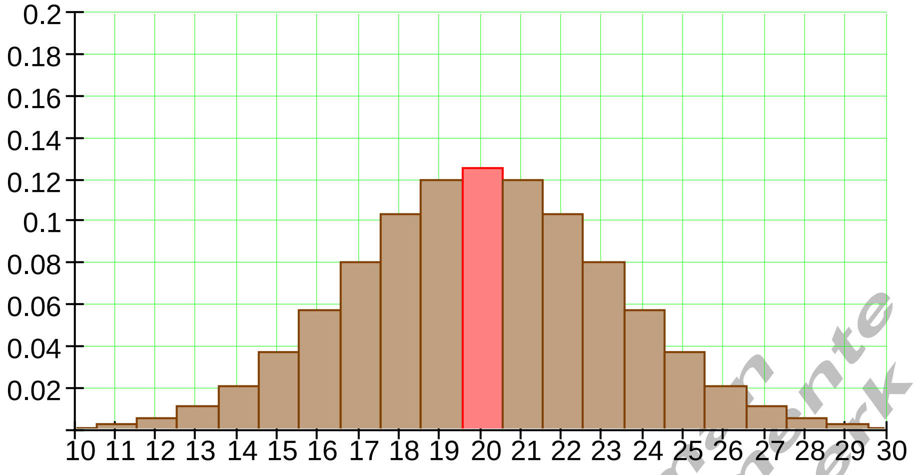
Binomialverteilung für n = 40 und p = 0,2

Wird ein Bernoulli- Versuch, bei dem die Trefferwahrscheinlichkeit **p = 0,4** ist, **n = 40** mal durchgeführt, dann erwarten wir im Mittel **16 Treffer**.



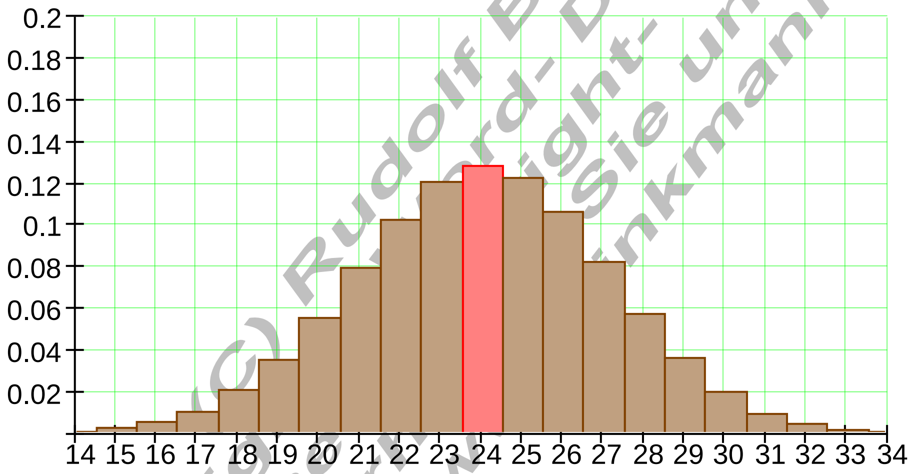
Binomialverteilung für n = 40 und p = 0,4

Wird ein Bernoulli- Versuch, bei dem die Trefferwahrscheinlichkeit **p = 0,5** ist, **n = 40** mal durchgeführt, dann erwarten wir im Mittel **20 Treffer**.



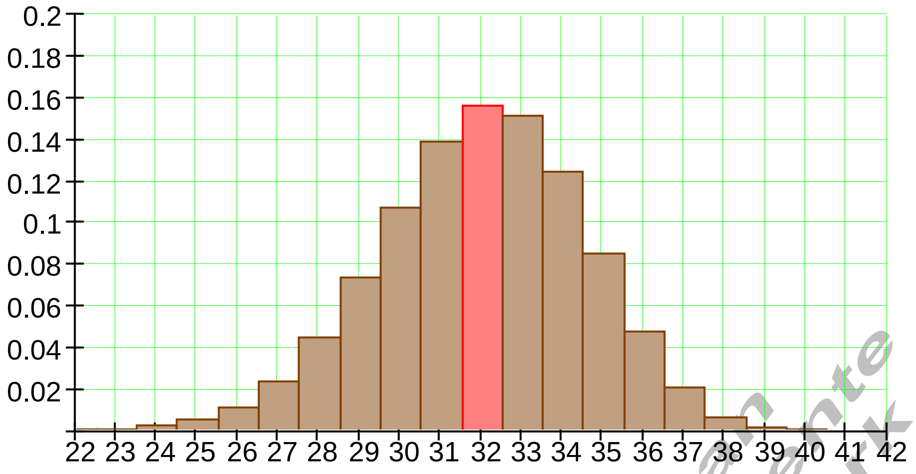
Binomialverteilung für n = 40 und p = 0,5

Wird ein Bernoulli- Versuch, bei dem die Trefferwahrscheinlichkeit **p = 0,6** ist, **n = 40** mal durchgeführt, dann erwarten wir im Mittel **24 Treffer**.



Binomialverteilung für n = 40 und p = 0,6

Wird ein Bernoulli- Versuch, bei dem die Trefferwahrscheinlichkeit **p = 0,8** ist, **n = 40** mal durchgeführt, dann erwarten wir im Mittel **32 Treffer**..



Binomialverteilung für n = 40 und p = 0,8

Beim Würfeln erwarten wir, dass bei 6000 Würfen die Zahl 6 etwa 1000 mal auftritt. Das bedeutet nicht, dass die Zahl 6 tatsächlich 1000 mal auftritt. Der Erwartungswert setzt unendlich viele Experimente voraus, deren Mittelwert er darstellt.

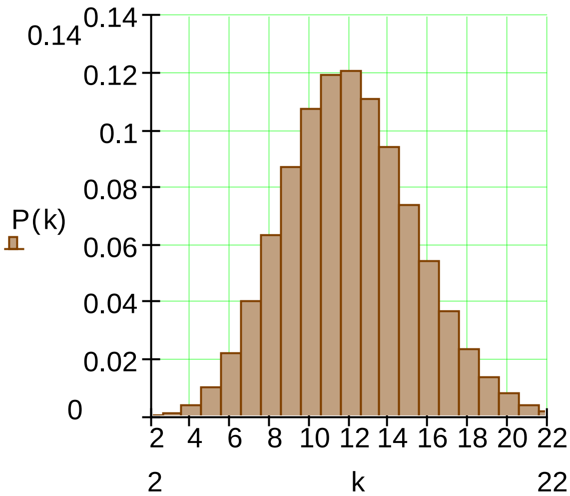
Zusammenfassend kann man sagen:
Wird ein Bernoulli- Versuch, bei dem die Trefferwahrscheinlichkeit **p** ist, **n** mal durchgeführt, dann erwarten wir im Mittel **n mal p Treffer**.

Erwartungs-wert einer Binomial-verteilung:	Bei einem $n-$stufigen Bernoulli$-$Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p gilt für den Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsvariablen X: Anzahl der Erfolge $E(X) = n \cdot p$ Statt $E(X)$ schreiben wir auch μ (in der mathematischen Lit. üblich) Damit ist der Erwartungswert einer binomial verteilten Zufallsgröße X $\mu = n \cdot p$

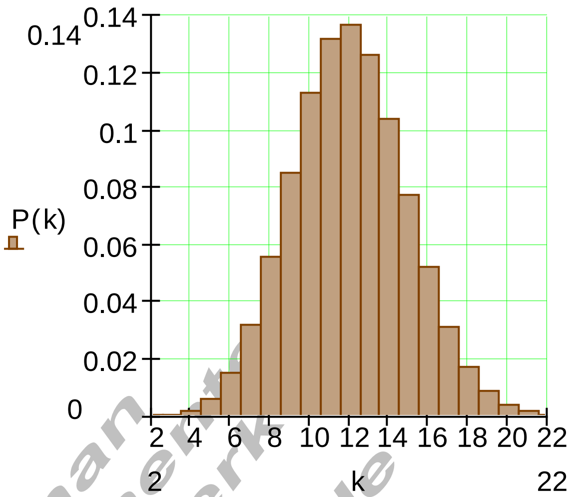
Der Beweis soll an dieser Stelle nicht geführt werden. Er kann mithilfe des Binomischen Lehrsatzes erfolgen.

Bei Betrachtung der Histogramme fällt auf, das die mit der größten Wahrscheinlichkeit auftretenden Ergebnisse dem Erwartungswert entsprechen.
Die Form der Histogramme ist ähnlich, sie entspricht der einer Glocke.
Für p = 0,5 liegen die Werte symmetrisch zum Erwartungswert.
Für p < 0,5 ist die Verteilung „linksschief“, für p > 0,5 dagegen „rechtsschief“.
In der Nähe des Erwartungswertes liegen die Ergebnisse mit den höchsten Wahrscheinlichkeiten.
Die Höhe einer Säule entspricht der Wahrscheinlichkeit des zugehörigen Ergebnisses, ihre Breite beträgt 1 Einheit. Da aber die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten eines Zufallsexperimentes immer 1 ist, ergibt die Summe aller Säulenflächen ebenfalls den Wert 1.
Die Fläche der Säulen in einem bestimmten Intervall ist somit ein Maß für die Wahrscheinlichkeit aller Erfolge, die in diesem Intervall liegen.

Varianz und Standardabweichung einer binomial verteilten Zufallsgröße.



Binomialverteilung für n = 120 und p = 0,1



Binomialverteilung für n = 40 und p = 0,3

Beide Binomialverteilungen haben den gleichen Erwartungswert;

$\mu = n \cdot p = 120 \cdot 0{,}1 = \underline{\underline{12}}$ $\qquad \mu = n \cdot p = 40 \cdot 0{,}3 = \underline{\underline{12}}$

Obwohl beide Verteilungen den gleichen Erwartungswert haben sehen sie unterschiedlich aus. Wir untersuchen die Streuung um den Erwartungswert.
Aus der beschreibenden Statistik ist die Varianz, bzw. die Standardabweichung als Streumaß bekannt.
Der Ausdruck

$$s^2 = h(x_1) \cdot \left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + h(x_2) \cdot \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + h(x_3) \cdot \left(x_3 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + h(x_n) \cdot \left(x_n - \overline{x}\right)^2$$

wurde als Varianz einer Stichprobe bezeichnet.
Die Werte $h(x_1); h(x_2); h(x_3); \ldots ; h(x_n)$ stellen relative Häufigkeiten dar.
Für die Standardabweichung galt $s = \sqrt{s^2}$

Analog hierzu definieren wir für Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

Varianz und Standard-abweichung:	Ist X eine Zufallsvariable, welche die Werte $x_1; x_2; x_3; x_4; \ldots; x_n$ annehmen kann und den Erwartungswert μ hat, so heißt $V(x) = P(X = x_1) \cdot (x_1 - \mu)^2 + P(X = x_2) \cdot (x_2 - \mu)^2 + \ldots + P(X = x_n) \cdot (x_n - \mu)^2$ die Varianz der Zufallsvariablen X. Die Quadratwurzel aus der Varianz einer Zufallsgröße heißt Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V(x)}$

Speziell für Binomialverteilungen gilt:

Varianz und Standard-abweichung für Binomial-verteilungen:	Bei einem $n-$stufigen Bernoulli – Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p und der Misserfolgswahrscheinlichkeit $1-p$ und der Zufallsgröße X: Anzahl der Erfolge gilt für die Varianz: $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$ und für die Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Der Beweis soll an dieser Stelle nicht geführt werden.

Für die oben abgebildeten Wahrscheinlichkeitsverteilungen gilt:

Binomialverteilung für $n = 120$ und $p = 0{,}1$

Erwartungswert:

$\mu = n \cdot p = 120 \cdot 0{,}1 = \underline{\underline{12}}$

Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{120 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} \approx \underline{\underline{3{,}286}}$

Binomialverteilung für $n = 40$ und $p = 0{,}3$

Erwartungswert:

$\mu = n \cdot p = 40 \cdot 0{,}3 = \underline{\underline{12}}$

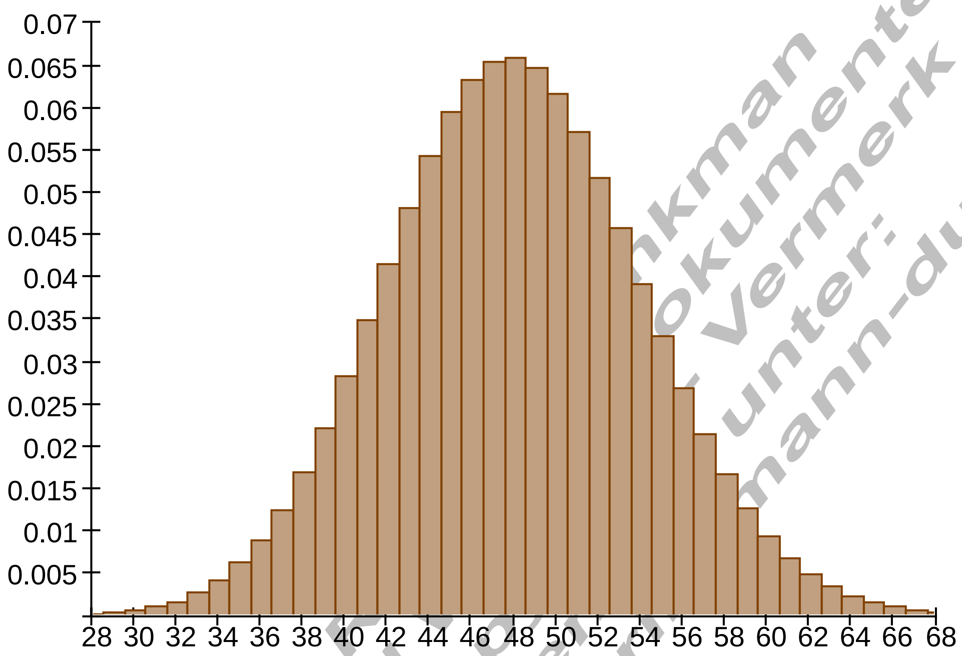
Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{40 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} \approx \underline{\underline{2{,}898}}$

Bei der ersten Verteilung ist die Streuung etwas größer als bei der zweiten.

Wahrscheinlichkeiten von Umgebungen

Bei einer Binomialverteilung ist der Erwartungswert der mit der größten Wahrscheinlichkeit.
In der Umgebung des Erwartungswertes befinden sich die Anzahlen der Erfolge mit den höchsten Wahrscheinlichkeiten.
Je mehr die Anzahl der Erfolge sich vom Erwartungswert unterscheiden, desto geringer wird deren Wahrscheinlichkeit.
Wir interessieren uns zunächst für die nähere Umgebung des Erwartungswertes und die in diesem Bereich auftretenden Wahrscheinlichkeiten.
Dazu soll folgende Verteilung als Beispiel dienen:



Binomialverteilung für $n = 200$ und $p = 0,24$

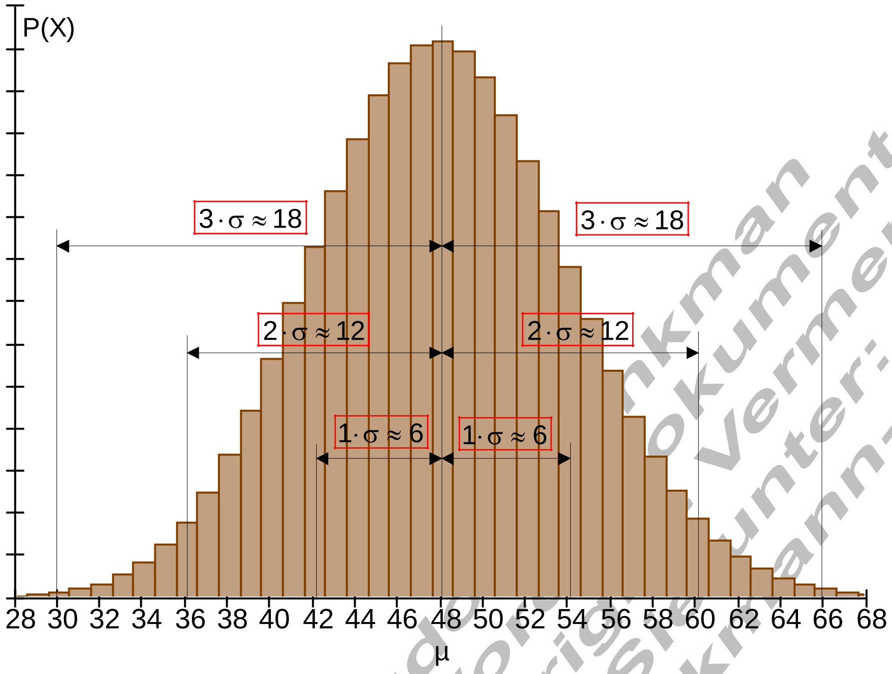
Erwartungswert: $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0,24 = \underline{\underline{48}}$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0,24 \cdot 0,76} \approx \underline{\underline{6,04}}$

Wahrscheinlichkeit einer Sigma- Umgebung.

Um den Erwartungswert 48 werden drei Umgebungen eingezeichnet;
1. eine $\sigma -$Umgebung der Breite $\sigma \approx 6$
2. eine $2\sigma -$Umgebung der Breite $2\sigma \approx 12$
3. eine $3\sigma -$Umgebung der Breite $3\sigma \approx 18$

In diesen Bereichen ist die Wahrscheinlichkeit zu untersuchen.



Dazu benötigen wir zunächst eine kumulierte Wahrscheinlichkeitstabelle für den interessierenden Bereich.

Binomialverteilung für $n = 200$ und $p = 0,24$

k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$
28	0,000	35	0,017	42	0,182	49	0,603	56	0,918	63	0,994
29	0,001	36	0,026	43	0,230	50	0,665	57	0,940	64	0,996
30	0,001	37	0,038	44	0,284	51	0,722	58	0,957	65	0,998
31	0,002	38	0,055	45	0,344	52	0,774	59	0,969	66	0,998
32	0,004	39	0,077	46	0,407	53	0,819	60	0,979	67	0,999
33	0,007	40	0,106	47	0,473	54	0,859	61	0,986	68	0,999
34	0,011	41	0,140	48	0,539	55	0,892	62	0,990	69	1,000

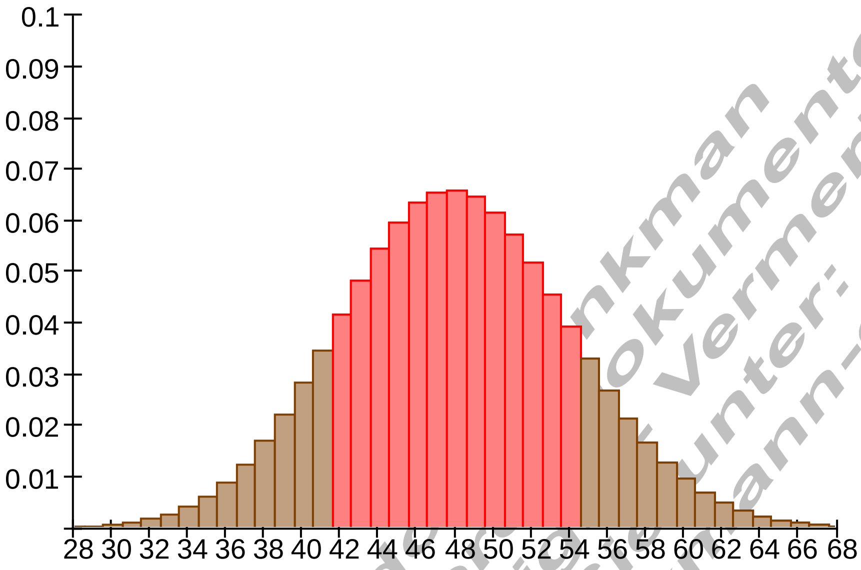
Wahrscheinlichkeit der einfachen Sigma- Umgebung.

Zu bestimmen ist $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma)$

mit $\mu = 48$ und $\sigma \approx 6$ wird $\mu - \sigma \approx 48 - 6 = 42$ und $\mu + \sigma \approx 48 + 6 = 54$ und damit

$P(42 \le X \le 54) = P(X \le 54) - P(X \le 41) = 0,859 - 0,140 = \underline{\underline{0,719}}$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,719 (71,9%) liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall [42 ; 54]. Das entspricht etwa der einfachen Sigma- Umgebung vom Erwartungswert.



Wahrscheinlichkeit der einfachen σ – Umgebung $\approx 0,719$

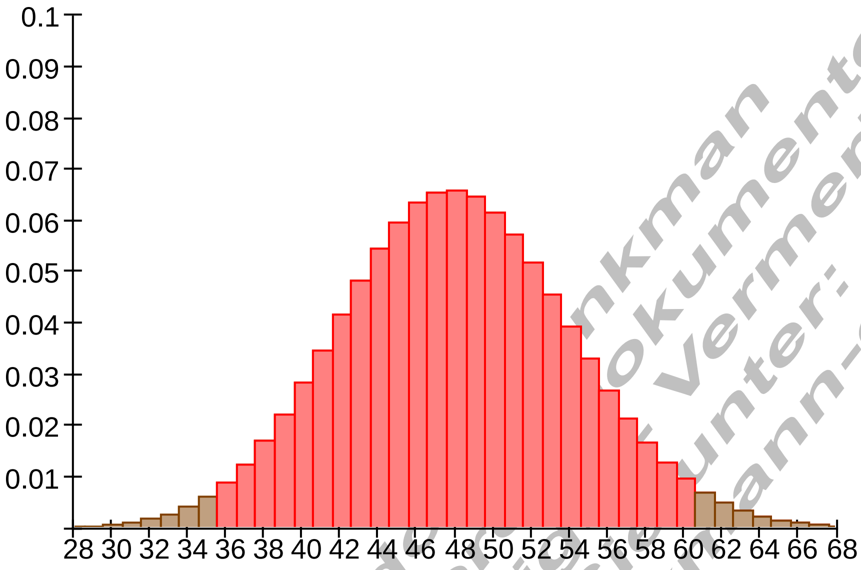
Wahrscheinlichkeit der doppelten Sigma- Umgebung.

Zu bestimmen ist $P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma)$

mit $\mu = 48$ und $\sigma \approx 6$ wird $\mu - 2\sigma \approx 48 - 12 = 36$ und $\mu + 2\sigma \approx 48 + 12 = 60$ und damit

$P(36 \le X \le 60) = P(X \le 60) - P(X \le 35) = 0{,}979 - 0{,}017 = \underline{\underline{0{,}962}}$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,962 (96,2%) liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall [36 ; 60]. Das entspricht etwa der doppelten Sigma- Umgebung vom Erwartungswert.



Wahrscheinlichkeit der doppelten σ – Umgebung $\approx 0{,}962$

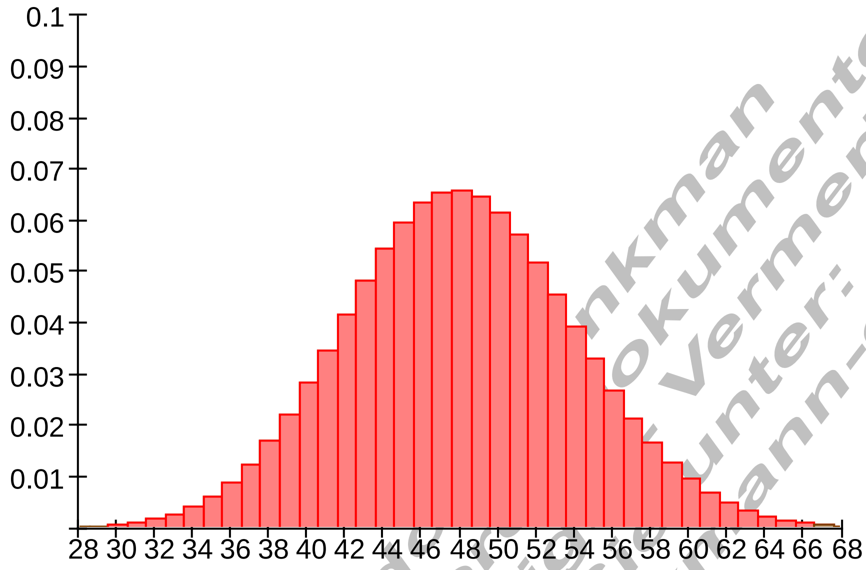
Wahrscheinlichkeit der dreifachen Sigma- Umgebung.

Zu bestimmen ist $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$

mit $\mu = 48$ und $\sigma \approx 6$ wird $\mu - 3\sigma \approx 48 - 18 = 30$ und $\mu + 3\sigma \approx 48 + 18 = 66$ und damit

$P(30 \leq X \leq 66) = P(X \leq 66) - P(X \leq 29) = 0{,}998 - 0{,}001 = \underline{\underline{0{,}997}}$

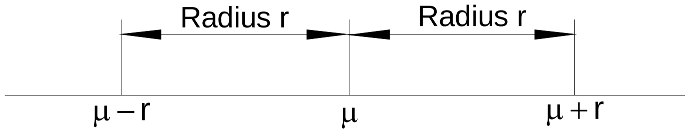
Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,997 (99,7%) liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall [30 ; 66]. Das entspricht etwa der dreifachen Sigma- Umgebung vom Erwartungswert.



Wahrscheinlichkeit der dreifachen σ – Umgebung $\approx 0{,}997$

Umgebungsradius.

Der Umgebung des Erwartungswerts wird ein Radius zugeordnet. Darunter verstehen wir den beidseitigen Abstand vom Erwartungswert. Eine Grafik soll das erläutern.

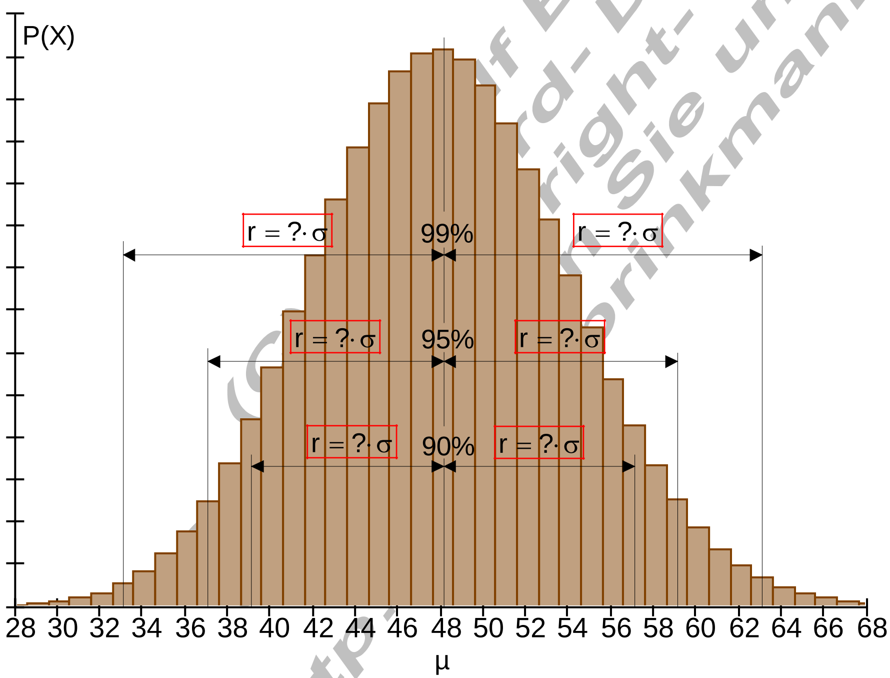


Jedem Umgebungsradius lässt sich eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zuordnen.

Im oben angeführten Beispiel gehört zu einer einfachen Sigma- Umgebung (r = 6) eine Umgebungswahrscheinlichkeit von etwa 0,719, zur doppelten Sigma- Umgebung (r = 12) eine von etwa 0,962 und zur dreifachen Sigma- Umgebung (r = 18) eine von etwa 0,997.

Umgekehrt gehört zu jeder Umgebungswahrscheinlichkeit ein bestimmter Radius.

Der Umgebungsradius bei fest vorgegebener Umgebungswahrscheinlichkeit (90%, 95%, 99%) lässt sich wie folgt bestimmen:



Liegt für die Binomialverteilung eine Tabelle mit den kumulierten Wahrscheinlichkeiten vor, lässt sich das Problem durch Einschachtelung lösen. Für die zwei Sigma- Umgebung, (im obigen Beispiel r = 12), war die Umgebungswahrscheinlichkeit etwa 96,2%.

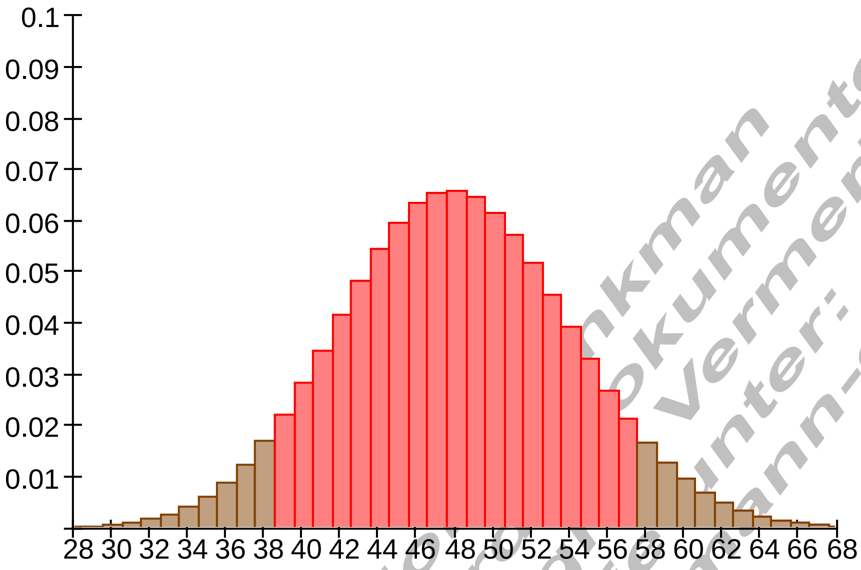
Für die 90% Wahrscheinlichkeit ist der Umgebungsradius geringer. Ansatz mit r = 10.

μ	r	$\mu - r \le X \le \mu + r$	$P(X \le \mu + r) - P(X \le \mu - r - 1)$
48	10	$38 \le X \le 58$	$0{,}957 - 0{,}038 = 0{,}919$
48	9	$39 \le X \le 57$	$0{,}940 - 0{,}055 = 0{,}885$

Der gesuchte Radius liegt zwischen den Werten 9 und 10. Da es sich bei der Binomialverteilung um eine diskrete Verteilung handelt, muss man sich für den Radius entscheiden, der der gewünschten Wahrscheinlichkeit am nächsten liegt. In diesem Fall ist das der Radius r = 9. Teilt man diesen Wert durch Sigma, dann lässt sich der Radius als vielfaches von Sigma darstellen.

$$\frac{r}{\sigma} = \frac{9}{6{,}04} \approx 1{,}49 \Rightarrow \underline{\underline{r \approx 1{,}49\,\sigma}}$$

In einer $1{,}49\,\sigma$ Umgebung liegen etwa 88,5% aller Erfolge.



Radius der $90\%-\text{Umgebung } r \approx 9 \approx 1{,}49 \cdot \sigma$ $P(\mu - 9 \le X \le \mu + 9) \approx 0{,}885$

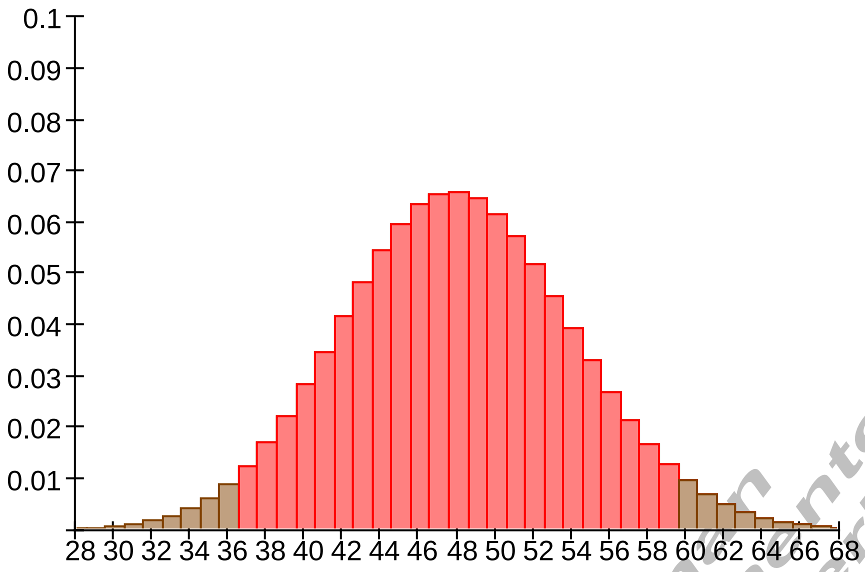
Für die 95% Wahrscheinlichkeit wird der Ansatz mit r = 12 versucht.

μ	r	$\mu - r \le X \le \mu + r$	$P(X \le \mu + r) - P(X \le \mu - r - 1)$
48	12	$36 \le X \le 60$	$0{,}979 - 0{,}017 = 0{,}962$
48	11	$37 \le X \le 59$	$0{,}969 - 0{,}026 = 0{,}943$

Der gesuchte Radius liegt zwischen den Werten 11 und 12.
Der Radius r = 11 liegt der gewünschten Wahrscheinlichkeit am nächsten.

$$\frac{r}{\sigma} = \frac{11}{6{,}04} \approx 1{,}82 \Rightarrow \underline{\underline{r \approx 1{,}82\,\sigma}}$$

In einer $1{,}82\,\sigma$ Umgebung liegen etwa 94,3% aller Erfolge.



Radius der 95% – Umgebung $r \approx 11 \approx 1{,}82 \cdot \sigma$ $P(\mu - 11 \le X \le \mu + 11) \approx 0{,}943$

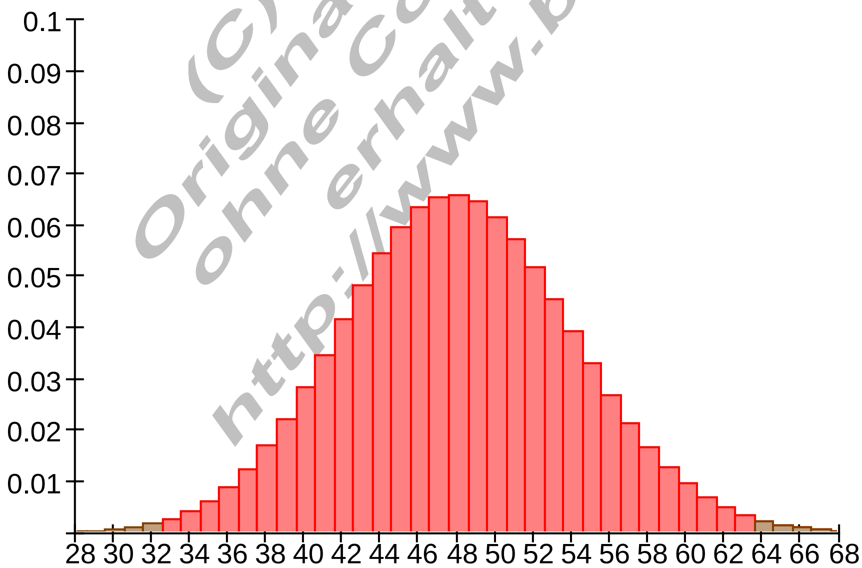
Für die 99% Wahrscheinlichkeit wird der Ansatz mit r = 14 versucht.

μ	r	$\mu - r \le X \le \mu + r$	$P(X \le \mu + r) - P(X \le \mu - r - 1)$
48	14	$34 \le X \le 62$	$0{,}990 - 0{,}007 = 0{,}983$
48	15	$33 \le X \le 63$	$0{,}994 - 0{,}004 = 0{,}99$

Der gesuchte Radius hat den Wert r = 15

$$\frac{r}{\sigma} = \frac{15}{6{,}04} \approx 2{,}48 \Rightarrow \underline{\underline{r \approx 2{,}48\sigma}}$$

In einer $2{,}48\sigma$ Umgebung liegen etwa 99% aller Erfolge.

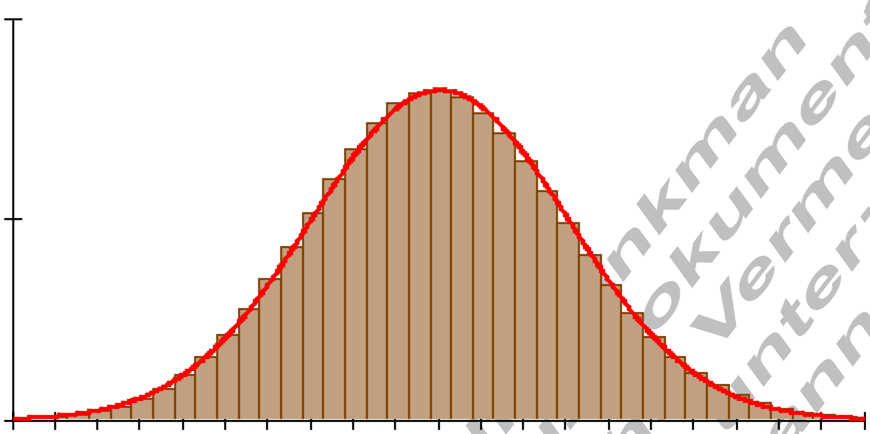


Radius der 99% – Umgebung $r \approx 15 \approx 2{,}48 \cdot \sigma$ $P(\mu - 15 \le X \le \mu + 15) \approx 0{,}99$

Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Histogramme von Binomialverteilungen sind für nicht zu kleine n glockenförmig.
Mit größer werdendem n tritt die Glockenform immer deutlicher hervor.
Die Histogrammform nähert sich mit größer werdendem n immer mehr der Gaußschen Verteilungskurve, auch Glockenkurve genannt.
Die gesamte Fläche zwischen der Kurve und der waagerechten Achse hat den Wert 1. Das gilt ebenso für die Summe aller Säulenflächen.

Funktionsgleichung der Glockenkurve: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$



Approximation der Binomialverteilung durch die Gaußsche Normalverteilung

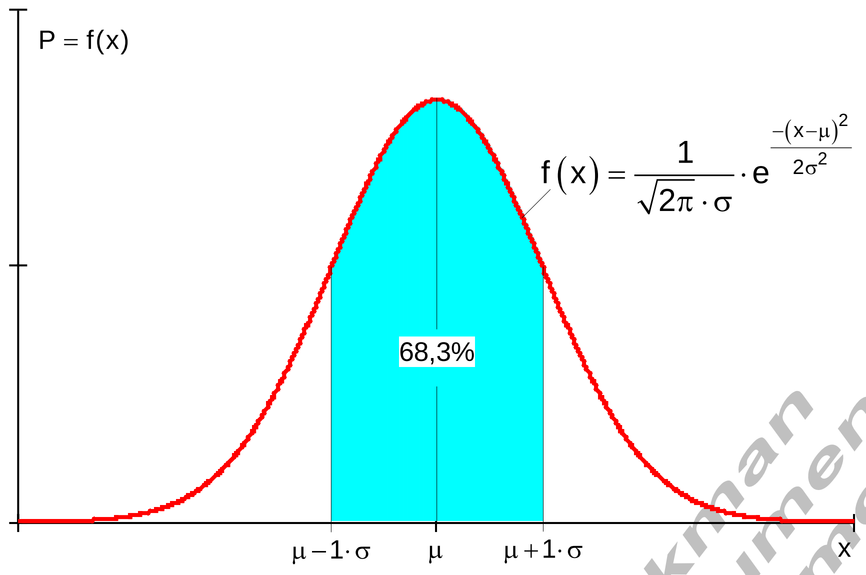
Dies ermöglicht es für große n, Wahrscheinlichkeiten in einem bestimmten Intervall näherungsweise zu bestimmen.

Die Fläche, die die Normalverteilung mit der x – Achse einschließt,

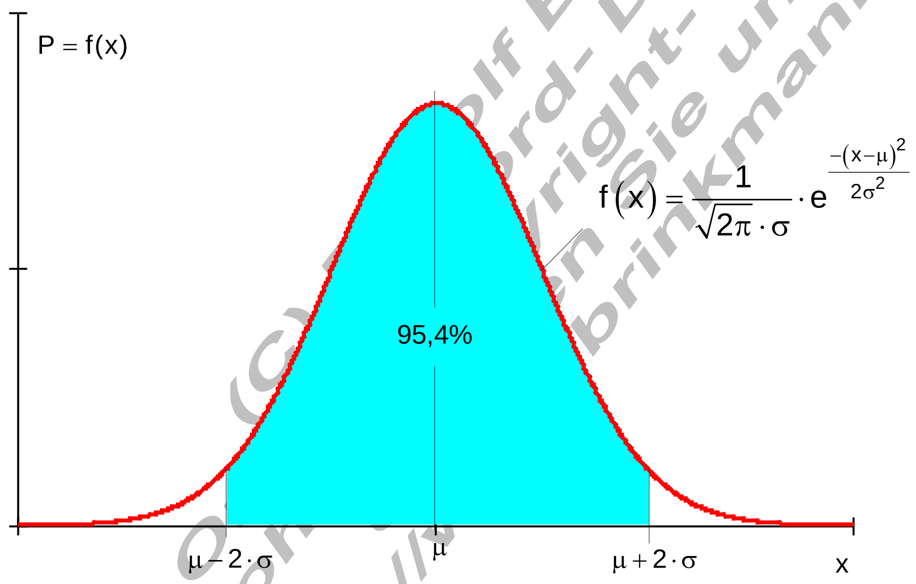
lässt sich über das Integral $\int_a^b f(x) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ berechnen.

Die Berechnung der Fläche mit dem Integral ist recht mühsam, deshalb gibt es Tabellen in denen die Wahrscheinlichkeit von Sigma- Umgebungen aufgelistet sind.

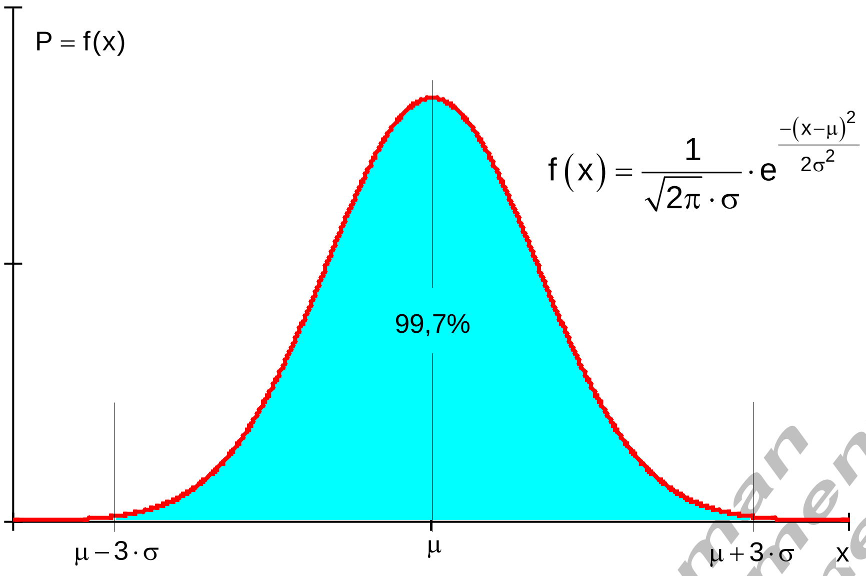
Für Sigma- Umgebungen gilt folgender Zusammenhang:



$$P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)\approx 0{,}683=68{,}3\%\ \ (\text{einfache }\sigma-\text{Umgebung})$$

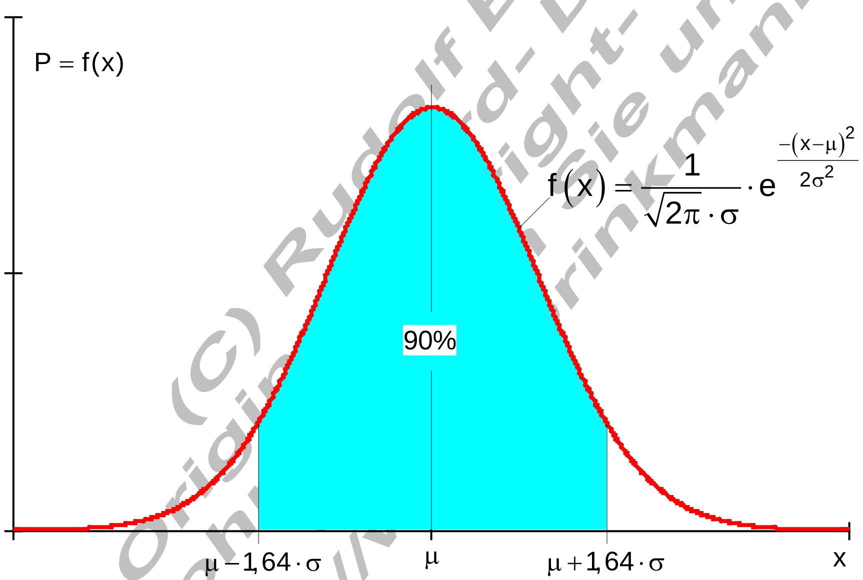


$$P(\mu-2\cdot\sigma\le X\le\mu+2\cdot\sigma)\approx 0{,}954=95{,}4\%\ \ (\text{doppelte }\sigma-\text{Umgebung})$$

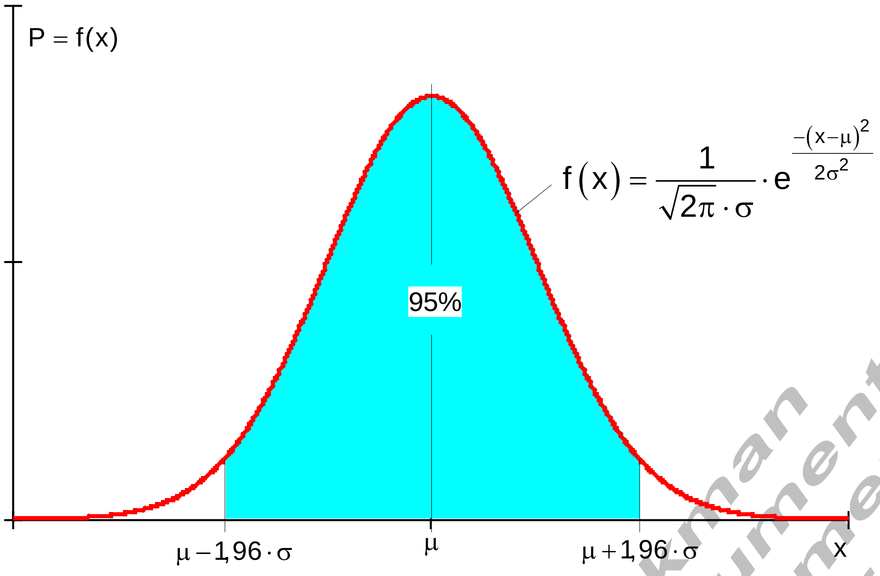


$$P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 3 \cdot \sigma) \approx 0{,}997 = 99{,}7\% \ (\text{dreifache } \sigma - \text{Umgebung})$$

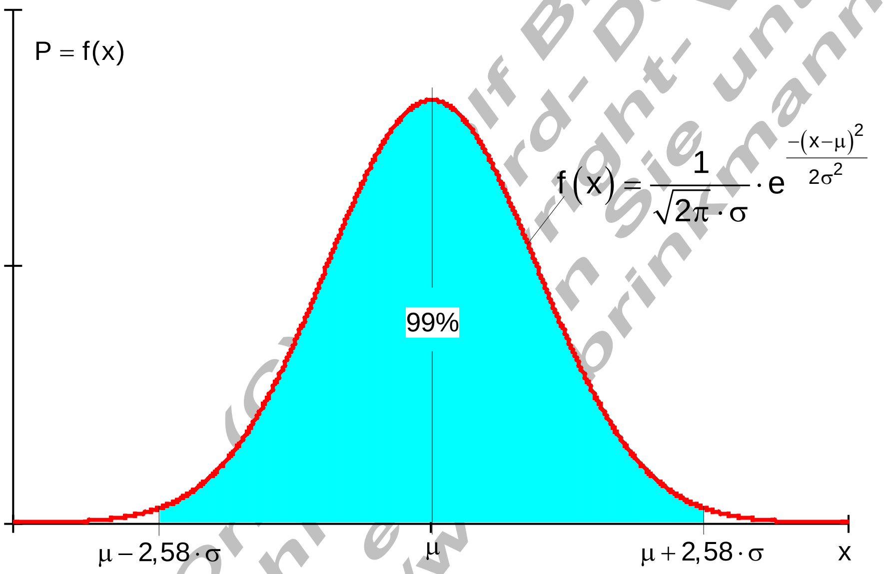
Für %- Umgebungen gilt folgender Zusammenhang:



$$P(\mu - 1{,}64 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64 \cdot \sigma) \approx 0{,}899 = 89{,}9\% \ (90\% - \text{Umgebung})$$



$$P(\mu - 1{,}96 \cdot \sigma \le X \le \mu + 1{,}96 \cdot \sigma) \approx 0{,}95 = 95\% \quad (95\% - \text{Umgebung})$$



$$P(\mu - 2{,}58 \cdot \sigma \le X \le \mu + 2{,}58 \cdot \sigma) \approx 0{,}99 = 99\% \quad (99\% - \text{Umgebung})$$

In der Literatur hat man sich auf folgende Umgebungswahrscheinlichkeiten geeinigt:

Radius der Umgebung	Wahrscheinlichkeit der Umgebung
$1 \cdot \sigma$	0,68
$2 \cdot \sigma$	0,955
$3 \cdot \sigma$	0,997

Die zu einem Radius gehörige Umgebungswahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit der Umgebung	Radius der Umgebung
0,90	$1,64 \cdot \sigma$
0,95	$1,96 \cdot \sigma$
0,99	$2,58 \cdot \sigma$

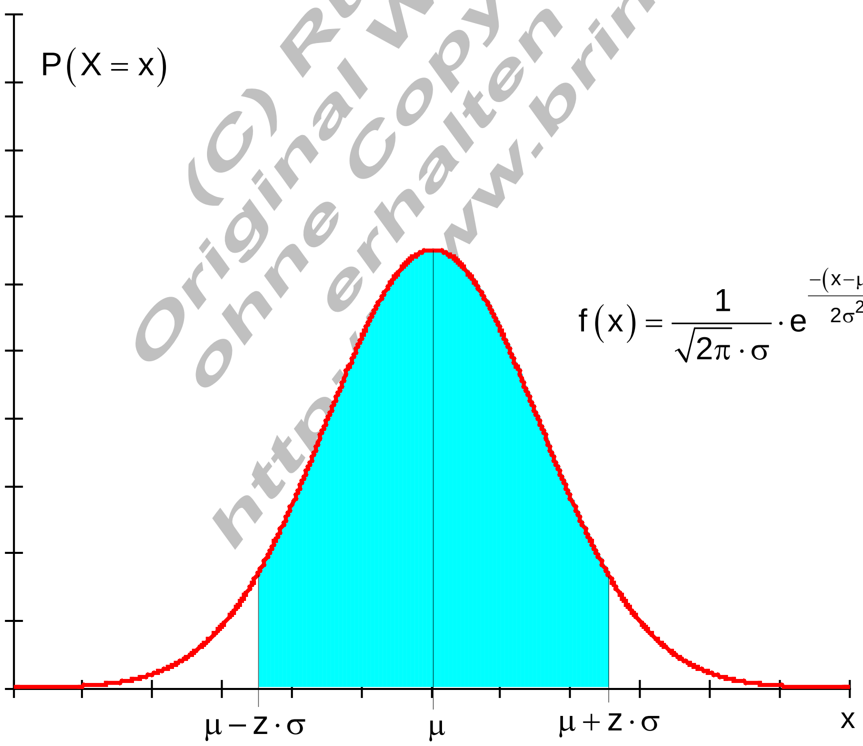
Der zu einer Umgebungswahrscheinlichkeit gehörige Radius

Da die Histogrammform der Binomialverteilung sich nur für entsprechend große n der Form der Normalverteilung immer mehr nähert, gilt folgendes Kriterium für die Verwendung der Intervallwahrscheinlichkeiten der Normalverteilung.

Falls die Bedingung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} > 3$ erfüllt ist (Laplace- Bedingung), liefert die Näherung durch die Normalverteilung hinreichend genaue Intervallwahrscheinlichkeiten.

Bislang war für jede Binomialverteilung mit einem bestimmten n und einer bestimmten Wahrscheinlichkeit p jeweils eine Tabelle mit den kumulierten Wahrscheinlichkeiten nötig, um Umgebungswahrscheinlichkeiten zu bestimmen.
Falls nun die Werte einer Binomialverteilung die Laplace- Bedingung erfüllen, dürfen Tabellenwerte der Normalverteilung benutzt werden.
Die Laplace- Bedingung ist in jedem Fall vorher zu überprüfen.

Für den Fall, dass der Umgebungsradius in Einheiten von Sigma angegeben wird, gilt folgender Zuammenhang:



Der Umgebungsradius vom Erwartungswert wird als Vielfaches in Einheiten von Sigma ausgedrückt. Dabei ist z der Faktor, mit dem Sigma zu multiplizieren ist.
Die Wahrscheinlichkeiten solcher Sigma- Umgebungen sind in der folgenden Tabelle in Abhängigkeit vom Faktor z dargestellt.

Der wesentliche Unterschied zur Darstellung der Wahrscheinlichkeiten in einer Binomialverteilung, wie sie bisher verwendet wurde, ist, dass in der Normalverteilung die Werte auf der x- Achse als kontinuierlich angesehen werden können.
Bei der Binomialverteilung handelt es sich um diskrete Werte für k.

Wahrscheinlichkeiten für σ – Umgebungen normalverteilter Zufallsvariablen
$P = P\left(\mu - z\cdot\sigma \le X \le \mu - z\cdot\sigma\right)$ falls $\sigma > 3$ Laplace- Bedingung

z	P	z	P	z	P	z	P	z	P	z	P
0,01	0,008	0,51	0,390	1,01	0,688	1,51	0,869	2,01	0,956	2,51	0,988
0,02	0,016	0,52	0,397	1,02	0,692	1,52	0,871	2,02	0,957	2,52	0,988
0,03	0,024	0,53	0,404	1,03	0,697	1,53	0,874	2,03	0,958	2,53	0,989
0,04	0,032	0,54	0,411	1,04	0,702	1,54	0,876	2,04	0,959	2,54	0,989
0,05	0,040	0,55	0,418	1,05	0,706	1,55	0,879	2,05	0,960	2,55	0,989
0,06	0,048	0,56	0,425	1,06	0,711	1,56	0,881	2,06	0,961	2,56	0,990
0,07	0,056	0,57	0,431	1,07	0,715	1,57	0,884	2,07	0,962	2,57	0,990
0,08	0,064	0,58	0,438	1,08	0,720	1,58	0,886	2,08	0,962	2,58	0,990
0,09	0,072	0,59	0,445	1,09	0,724	1,59	0,888	2,09	0,963	2,59	0,990
0,10	0,080	0,60	0,451	1,10	0,729	1,60	0,890	2,10	0,964	2,60	0,991
0,11	0,088	0,61	0,458	1,11	0,733	1,61	0,893	2,11	0,965	2,61	0,991
0,12	0,096	0,62	0,465	1,12	0,737	1,62	0,895	2,12	0,966	2,62	0,991
0,13	0,103	0,63	0,471	1,13	0,742	1,63	0,897	2,13	0,967	2,63	0,991
0,14	0,111	0,64	0,478	1,14	0,746	1,64	0,899	2,14	0,968	2,64	0,992
0,15	0,119	0,65	0,484	1,15	0,750	1,65	0,901	2,15	0,968	2,65	0,992
0,16	0,127	0,66	0,491	1,16	0,754	1,66	0,903	2,16	0,969	2,66	0,992
0,17	0,135	0,67	0,497	1,17	0,758	1,67	0,905	2,17	0,970	2,67	0,992
0,18	0,143	0,68	0,503	1,18	0,762	1,68	0,907	2,18	0,971	2,68	0,993
0,19	0,151	0,69	0,510	1,19	0,766	1,69	0,909	2,19	0,971	2,69	0,993
0,20	0,159	0,70	0,516	1,20	0,770	1,70	0,911	2,20	0,972	2,70	0,993
0,21	0,166	0,71	0,522	1,21	0,774	1,71	0,913	2,21	0,973	2,71	0,993
0,22	0,174	0,72	0,528	1,22	0,778	1,72	0,915	2,22	0,974	2,72	0,993
0,23	0,182	0,73	0,535	1,23	0,781	1,73	0,916	2,23	0,974	2,73	0,994
0,24	0,190	0,74	0,541	1,24	0,785	1,74	0,918	2,24	0,975	2,74	0,994
0,25	0,197	0,75	0,547	1,25	0,789	1,75	0,920	2,25	0,976	2,75	0,994
0,26	0,205	0,76	0,553	1,26	0,792	1,76	0,922	2,26	0,976	2,76	0,994
0,27	0,213	0,77	0,559	1,27	0,796	1,77	0,923	2,27	0,977	2,77	0,994
0,28	0,221	0,78	0,565	1,28	0,799	1,78	0,925	2,28	0,977	2,78	0,995
0,29	0,228	0,79	0,570	1,29	0,803	1,79	0,927	2,29	0,978	2,79	0,995
0,30	0,236	0,80	0,576	1,30	0,806	1,80	0,928	2,30	0,979	2,80	0,995
0,31	0,243	0,81	0,582	1,31	0,810	1,81	0,930	2,31	0,979	2,81	0,995
0,32	0,251	0,82	0,588	1,32	0,813	1,82	0,931	2,32	0,980	2,82	0,995
0,33	0,259	0,83	0,593	1,33	0,816	1,83	0,933	2,33	0,980	2,83	0,995
0,34	0,266	0,84	0,599	1,34	0,820	1,84	0,934	2,34	0,981	2,84	0,995
0,35	0,274	0,85	0,605	1,35	0,823	1,85	0,936	2,35	0,981	2,85	0,996
0,36	0,281	0,86	0,610	1,36	0,826	1,86	0,937	2,36	0,982	2,86	0,996
0,37	0,289	0,87	0,616	1,37	0,829	1,87	0,939	2,37	0,982	2,87	0,996
0,38	0,296	0,88	0,621	1,38	0,832	1,88	0,940	2,38	0,983	2,88	0,996
0,39	0,303	0,89	0,627	1,39	0,835	1,89	0,941	2,39	0,983	2,89	0,996
0,40	0,311	0,90	0,632	1,40	0,838	1,90	0,943	2,40	0,984	2,90	0,996
0,41	0,318	0,91	0,637	1,41	0,841	1,91	0,944	2,41	0,984	2,91	0,996
0,42	0,326	0,92	0,642	1,42	0,844	1,92	0,945	2,42	0,984	2,92	0,996
0,43	0,333	0,93	0,648	1,43	0,847	1,93	0,946	2,43	0,985	2,93	0,997
0,44	0,340	0,94	0,653	1,44	0,850	1,94	0,948	2,44	0,985	2,94	0,997
0,45	0,347	0,95	0,658	1,45	0,853	1,95	0,949	2,45	0,986	2,95	0,997
0,46	0,354	0,96	0,663	1,46	0,856	1,96	0,950	2,46	0,986	2,96	0,997
0,47	0,362	0,97	0,668	1,47	0,858	1,97	0,951	2,47	0,986	2,97	0,997
0,48	0,369	0,98	0,673	1,48	0,861	1,98	0,952	2,48	0,987	2,98	0,997
0,49	0,376	0,99	0,678	1,49	0,864	1,99	0,953	2,49	0,987	2,99	0,997
0,50	0,383	1,00	0,683	1,50	0,866	2,00	0,954	2,50	0,988	3,00	0,997

Berechnung von Umgebungswahrscheinlichkeiten und Sigma- Umgebungen.

An einigen Beispielen soll gezeigt werden, wie mit dieser Tabelle zu arbeiten ist.
Zu beachten ist, dass die zu dem Wert z gehörige Umgebung immer symmetrisch zum Erwartungswert liegt.

1. Gegeben ist ein n- stufiger Bernoulli- Versuch mit n = 500 und p = 0,33.
   Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Erfolge im Intervall [150 ; 180]. Es soll mit einer Genauigkeit von drei Stellen hinter dem Komma gerechnet werden.

$$n = 500 \quad p = 0{,}33 \quad \Rightarrow \mu = 500 \cdot 0{,}33 = 165$$

$$\begin{array}{l} n = 500 \\ p = 0{,}33 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}33 = 165 \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{165 \cdot 0{,}67} = \sqrt{110{,}55} \approx 10{,}514 > 3 \end{array}$$

$$P(150 \le X \le 180) = P(149{,}5 \le X \le 180{,}5)^{*)}$$

$$\Rightarrow \text{Radius um den Erwartungswert: } r = \mu - 149{,}5 = 165 - 149{,}5 = 15{,}5$$

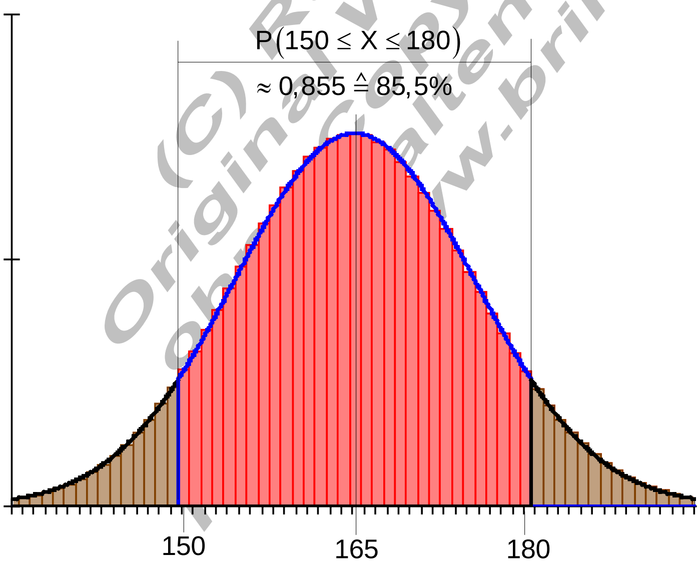
$$\frac{r}{\sigma} = z = \frac{15{,}5}{\sqrt{110{,}55}} \approx 1{,}474 \Rightarrow r = z \cdot \sigma \approx 1{,}474 \cdot \sigma$$

$$P(150 \le X \le 180) = P(\mu - z \cdot \sigma \le X \le \mu + z \cdot \sigma) = P(\mu - 1{,}474 \cdot \sigma \le X \le \mu + 1{,}474 \cdot \sigma)$$

$$z = 1{,}474 \Rightarrow \text{Tabellenwert: } 0{,}858$$

$$\underline{\underline{P(150 \le X \le 180) \approx 0{,}858 \quad (85{,}8\%)}}$$

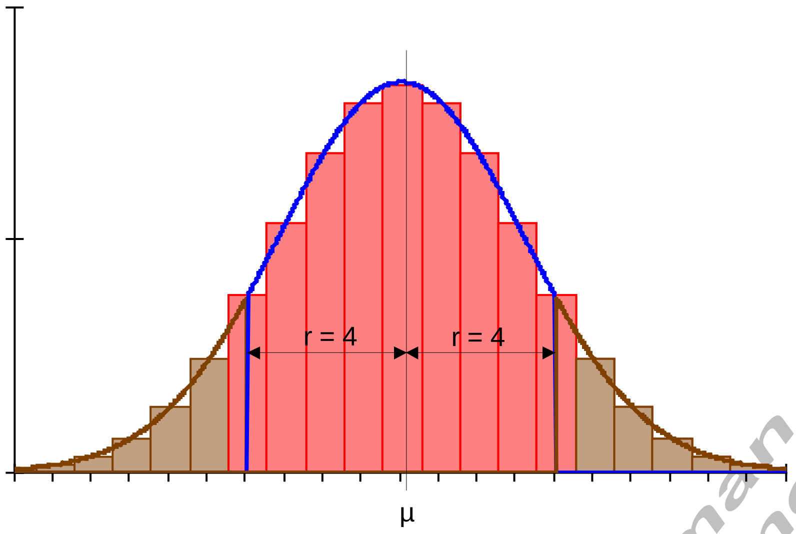
Die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Erfolge im Intervall [150 ; 180] beträgt etwa 85,8%



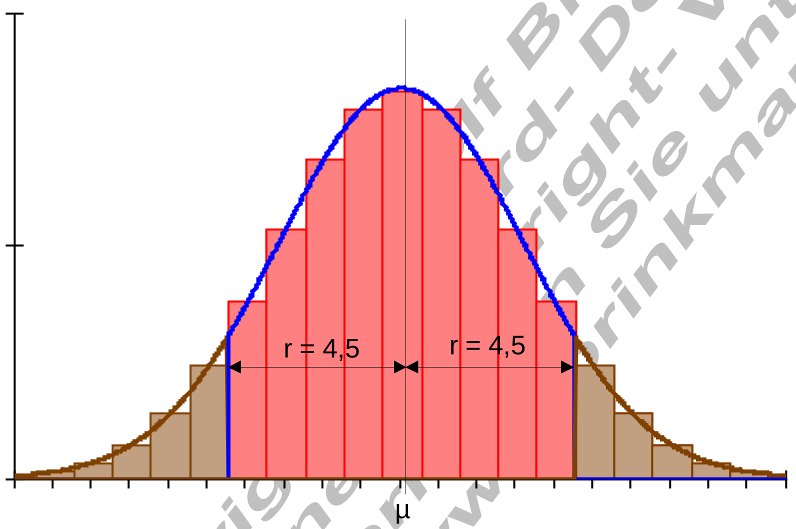
Warum sind die Intervallgrenzen um jeweils 0,5 zu vergrößern, wenn mit den Tabellenwerten der Normalverteilung die Intervallwahrscheinlichkeit bestimmt wird?
Bei $P(150 \le X \le 180) = P(149{,}5 \le X \le 180{,}5)$ war das der Fall.

Die Daten der verwendeten Tabelle basieren auf der Normalverteilung. Würde man den Radius r = 165 – 150 = 15 wählen, so wäre dieser um 0,5 zu klein. Er würde nur die halbe Fläche der Säule von k = 150 bzw. von k = 180 berücksichtigen.

Die folgende Grafik soll das erläutern.



Der gewählte Radius r = 4 ist zu klein. Er berücksichtigt auf jeder Seite vom Erwartungswert eine halbe Säule zu wenig, so dass die gewählte Umgebung nicht vollständig erfasst wird.



Der gewählte Radius r = 4,5 berücksichtigt auf jeder Seite vom Erwartungswert eine halbe Säule mehr, so dass die gewählte Umgebung vollständig erfasst wird.

2. Bestimmen Sie die 90% - Umgebung vom Erwartungswert
für n = 550 und p = 0,36

$$\begin{matrix} n = 550 \\ p = 0,36 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mu = n \cdot p = 550 \cdot 0,36 = 198 \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{198 \cdot 0,64} = \sqrt{126,72} \approx 11,257 > 3 \end{matrix}$$

$P(\mu - z \cdot \sigma \le X \le \mu + z \cdot \sigma) = 0,90$

Der dazugehörige z- Wert wird aus der Tabelle abgelesen für $P = 0,90$

$z = 1,64 \Rightarrow$ Umgebungsradius: $r = z \cdot \sigma \approx 1,64 \cdot \sqrt{126,72} \approx 18,46$

$\mu - z \cdot \sigma = 198 - 18,46 = 179,54 \approx 180$

$\mu + z \cdot \sigma = 198 + 18,46 = 216,46 \approx 216$

Das Intervall soll symmetrisch zum Erwartungswert $\mu = 198$ liegen.

Wir wählen: $P(180 \le X \le 216)$

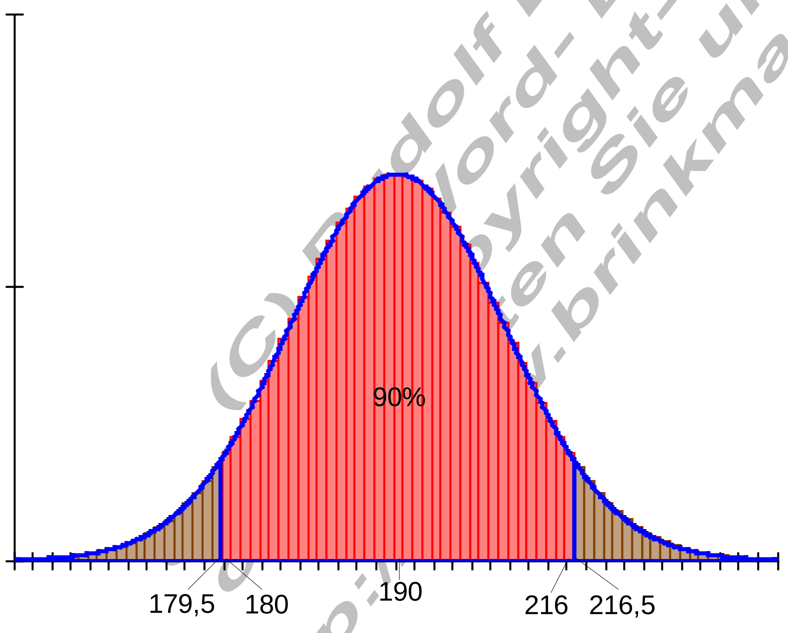
Es ist zu prüfen, ob das Intervall $\{180...198...216\}$ der Forderung (90%) entspricht.

$P(180 \le X \le 216) = P(179,5 \le X \le 216,5)$

$r = 18,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{18,5}{11,257} \Rightarrow r \approx 1,64 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 0,1,64$

$P(180 \le X \le 216) \approx 0,899$

Die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Erfolge im Intervall [180 ; 216] beträgt etwa 90%



3. Gegeben ist ein n- stufiger Bernoulli- Versuch. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für die Ergebnisse außerhalb von Umgebungen um den Erwartungswert.
   a) $n = 300 \quad p = 0{,}56$ bestimmen Sie $P(X < 162)$
   b) $n = 240 \quad p = \frac{1}{3}$ bestimmen Sie $P(X > 80)$

zu a)

$$\begin{matrix} n = 300 \\ p = 0{,}56 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mu = n \cdot p = 300 \cdot 0{,}56 = 168 \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{168 \cdot 0{,}44} = \sqrt{73{,}92} \approx 8{,}598 > 3 \end{matrix}$$

Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit für das Intervall [0 ; 161].
Aus der Tabelle kann nur die Wahrscheinlichkeit für ein um den Erwartungswert symmetrisches Intervall abgelesen werden, dieses enthält die Werte [162 .... 168 ... 174]. Daran anschließend folgt das Intervall [175 .... 300], welches aus Symmetriegründen die gleiche Größe wie [0 ; 161] hat. Es gilt folgender Ansatz:
[{ 0 ... 161 } {162 ... 168 ... 174 } { 175 ... 300}]

$$P(X < 162) = P(X \le 161) = \frac{1}{2}\left[1 - P(161{,}5 \le X \le 174{,}5)\right]$$

$$\text{Radius}: r = 168 - 161{,}5 = 6{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = z = \frac{6{,}5}{\sqrt{73{,}92}} \approx 0{,}756 \Rightarrow r \approx 0{,}756 \cdot \sigma$$

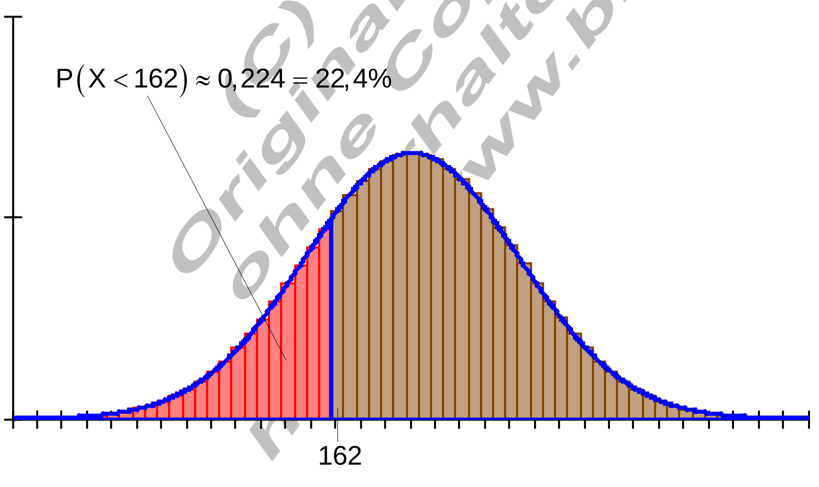
mit $z \approx 0{,}76$ wird

$$P(161{,}5 \le X \le 174{,}5) = P(\mu - z \cdot \sigma \le X \le \mu + z \cdot \sigma) \approx 0{,}553$$

und damit wird

$$P(X < 162) \approx \frac{1}{2}[1 - 0{,}553] = \frac{1}{2} \cdot 0{,}447 = \underline{\underline{0{,}2235}}$$

Die Wahrscheinlichkeit für weniger als 162 Erfolge ist etwa 22,4%



zu b)

$$n = 240 \qquad \mu = n \cdot p = 240 \cdot \frac{1}{3} = 80$$

$$p = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{80 \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{160}{3}} \approx 7{,}303 > 3$$

$$[0;79][79{,}5;80{,}5][81;240]$$

$$P(X > 80) = \frac{1}{2}\left[1 - P(79{,}5 \le X \le 80{,}5)\right]$$

$$\text{Radius}: r = 80 - 79{,}5 = 0{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = z = \frac{0{,}5}{\sqrt{\frac{160}{3}}} \approx 0{,}068 \Rightarrow r \approx 0{,}07 \cdot \sigma$$

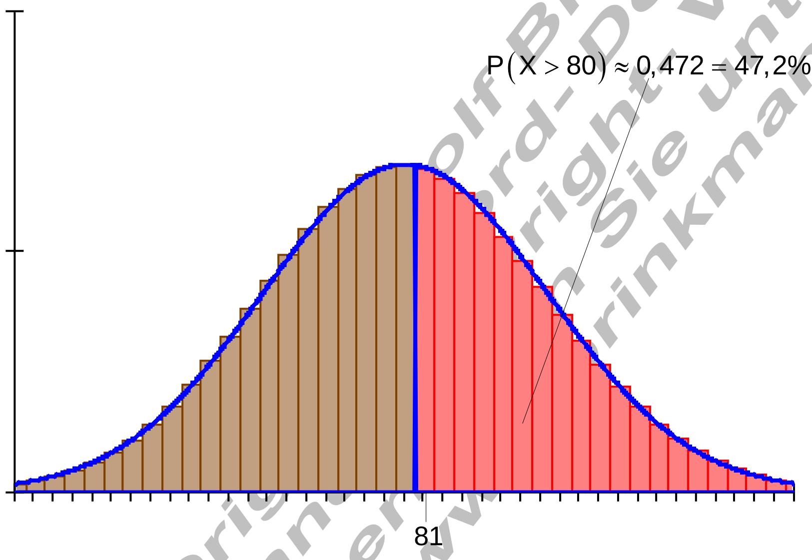
mit $z \approx 0{,}07$ wird

$$P(79{,}5 \le X \le 80{,}5) = P(\mu - z \cdot \sigma \le X \le \mu + z \cdot \sigma) \approx 0{,}056$$

und damit wird

$$P(X > 80) \approx 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}056) = 0{,}5 \cdot 0{,}944 \approx \underline{\underline{0{,}472}}$$

Die Wahrscheinlichkeit für mehr als 80 Erfolge ist etwa 47,2%



4. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit einer nicht symmetrischen Umgebung vom Erwartungswert. n = 180, p = 0,55, [89 ... 104].

$n = 180 \quad p = 0{,}55$ bestimmen Sie $P(89 \le X \le 104)$

$\left[\{89...93\}\{94...99...104\}\{105...109\}\right]$

Ansatz: $P(89 \le X \le 104) = \frac{1}{2}\left[P(89 \le X \le 109) + P(94 \le X \le 104)\right]$

$$\begin{matrix} n = 180 \\ p = 0{,}55 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mu = n \cdot p = 180 \cdot 0{,}55 = 99 \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{99 \cdot 0{,}45} = \sqrt{44{,}55} \approx 6{,}675 > 3 \end{matrix}$$

$P(89 \le X \le 109) = P(88{,}5 \le X \le 109{,}5)$

$r = 10{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = z = \frac{10{,}5}{6{,}675} \approx 1{,}57 \Rightarrow r \approx 1{,}57 \cdot \sigma$

$P(89 \le X \le 109) \approx 0{,}884$

$P(94 \le X \le 104) = P(93{,}5 \le X \le 104{,}5)$

$r = 5{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = z = \frac{5{,}5}{6{,}675} \approx 0{,}82 \Rightarrow r \approx 0{,}82 \cdot \sigma$

$P(94 \le X \le 104) \approx 0{,}588$

$P(89 \le X \le 104) = \frac{1}{2}[0{,}884 + 0{,}588] = 0{,}736$

Die Wahrscheinlichkeit der Erfolge im Intervall [89 ; 104] ist etwa 73,6%