

Berechnung von Umgebungs- und Intervallwahrscheinlichkeiten

An einigen Beispielen soll gezeigt werden, wie mit der Tabelle normalverteilter Zufallsvariablen zu arbeiten ist.

Zu beachten ist, dass die zu dem Wert z gehörige Umgebung immer symmetrisch zum Erwartungswert μ liegt.

1. Gegeben ist ein n -stufiger Bernoulli-Versuch mit $n = 500$ und $p = 0,33$. Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Erfolge im Intervall $[150; 180]$. Es soll mit einer Genauigkeit von drei Stellen hinter dem Komma gerechnet werden.

$$n = 500 \quad p = 0,33 \quad \Rightarrow \quad \mu = 500 \cdot 0,33 = 165$$

$$n = 500 \quad \Rightarrow \quad \mu = n \cdot p = 500 \cdot 0,33 = 165$$

$$p = 0,33 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{165 \cdot 0,67} = \sqrt{110,55} \approx 10,514 > 3$$

$$P(150 \leq X \leq 180) = P(149,5 \leq X \leq 180,5)^*$$

$$\Rightarrow \text{Radius um den Erwartungswert: } r = \mu - 149,5 = 165 - 149,5 = 15,5$$

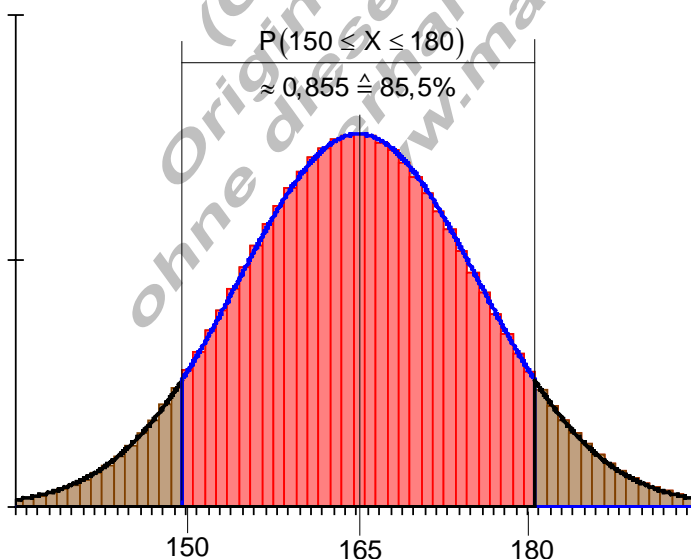
$$\frac{r}{\sigma} = z = \frac{15,5}{\sqrt{110,55}} \approx 1,474 \Rightarrow r = z \cdot \sigma \approx 1,474 \cdot \sigma$$

$$P(150 \leq X \leq 180) = P(\mu - z \cdot \sigma \leq X \leq \mu + z \cdot \sigma) = P(\mu - 1,474 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 1,474 \cdot \sigma)$$

$$z = 1,474 \Rightarrow \text{Tabellenwert: } 0,858$$

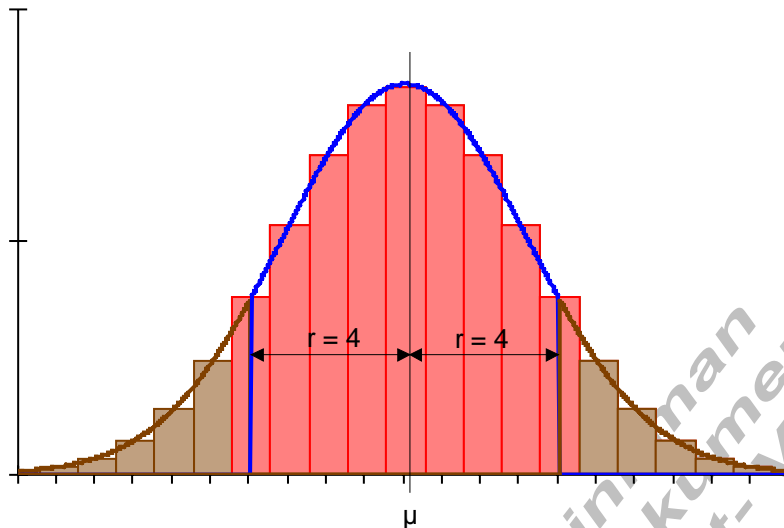
$$P(150 \leq X \leq 180) \approx 0,858 \quad (85,8\%)$$

Die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Erfolge im Intervall $[150; 180]$ beträgt etwa 85,8%

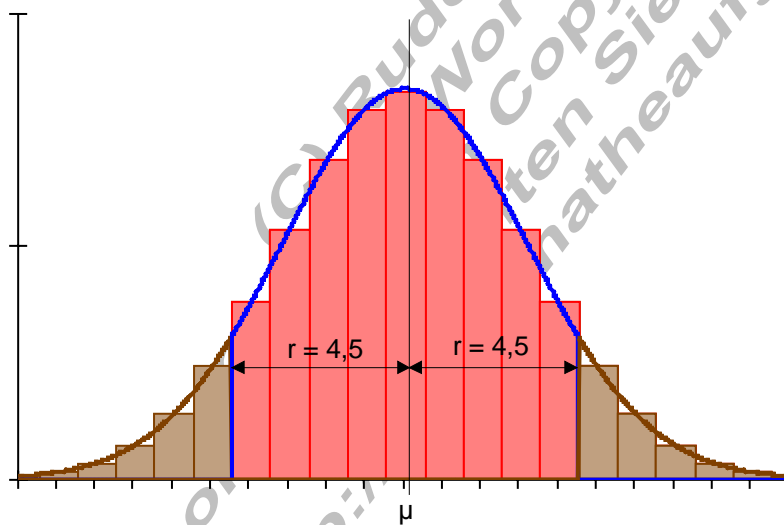


Warum sind die Intervallgrenzen um jeweils 0,5 zu vergrößern, wenn mit den Tabellenwerten der Normalverteilung die Intervallwahrscheinlichkeit bestimmt wird?
Bei $P(150 \leq X \leq 180) = P(149,5 \leq X \leq 180,5)$ war das der Fall.

Die Daten der verwendeten Tabelle basieren auf der Normalverteilung. Würde man den Radius $r = 165 - 150 = 15$ wählen, so wäre dieser um 0,5 zu klein. Er würde nur die halbe Fläche der Säule von $k = 150$ bzw. von $k = 180$ berücksichtigen. Die folgende Grafik soll das erläutern.



Der gewählte Radius $r = 4$ ist zu klein. Er berücksichtigt auf jeder Seite vom Erwartungswert eine halbe Säule zu wenig, so dass die gewählte Umgebung nicht vollständig erfasst wird.



Der gewählte Radius $r = 4,5$ berücksichtigt auf jeder Seite vom Erwartungswert eine halbe Säule mehr, so dass die gewählte Umgebung vollständig erfasst wird.

2. Bestimmen Sie die 90% - Umgebung vom Erwartungswert für $n = 550$ und $p = 0,36$

$$n = 550 \quad \mu = n \cdot p = 550 \cdot 0,36 = 198$$

$$p = 0,36 \Rightarrow \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{198 \cdot 0,64} = \sqrt{126,72} \approx 11,257 > 3$$

$$P(\mu - z \cdot \sigma \leq X \leq \mu + z \cdot \sigma) = 0,90$$

Der dazugehörige z - Wert wird aus der Tabelle abgelesen für $P = 0,90$

$$z = 1,64 \Rightarrow \text{Umgebungsradius: } r = z \cdot \sigma \approx 1,64 \cdot \sqrt{126,72} \approx 18,46$$

$$\mu - z \cdot \sigma = 198 - 18,46 = 179,54 \approx 180$$

$$\mu + z \cdot \sigma = 198 + 18,46 = 216,46 \approx 216$$

Das Intervall soll symmetrisch zum Erwartungswert $\mu = 198$ liegen.

Wir wählen: $P(180 \leq X \leq 216)$

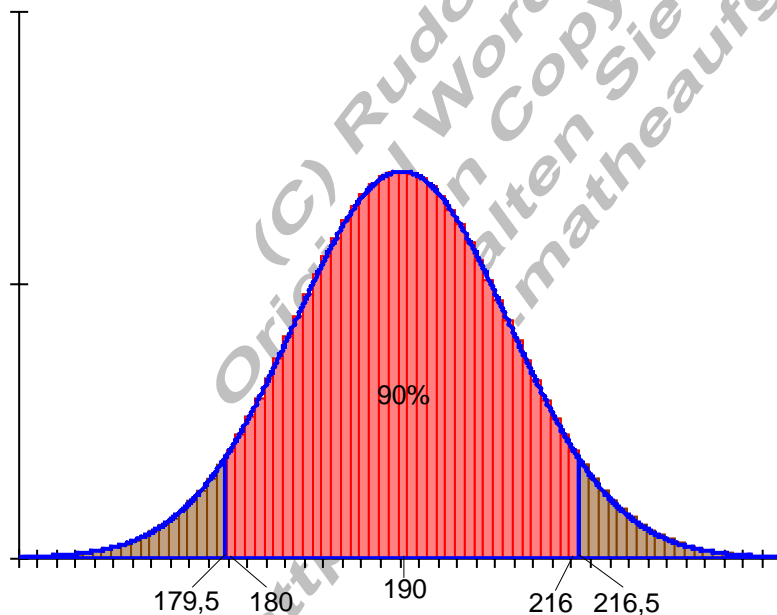
Es ist zu prüfen, ob das Intervall $\{180 \dots 198 \dots 216\}$ der Forderung (90%) entspricht.

$$P(180 \leq X \leq 216) = P(179,5 \leq X \leq 216,5)$$

$$r = 18,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{18,5}{11,257} \Rightarrow r \approx 1,64 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1,64$$

$$P(180 \leq X \leq 216) \approx 0,899$$

Die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Erfolge im Intervall $[180 ; 216]$ beträgt etwa 90%



3. Gegeben ist ein n- stufiger Bernoulli- Versuch. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für die Ergebnisse außerhalb von Umgebungen um den Erwartungswert.

a) $n = 300$ $p = 0,56$ bestimmen Sie $P(X < 162)$

b) $n = 240$ $p = \frac{1}{3}$ bestimmen Sie $P(X > 80)$

zu a)

$$n = 300 \quad \mu = n \cdot p = 300 \cdot 0,56 = 168$$

$$p = 0,56 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{168 \cdot 0,44} = \sqrt{73,92} \approx 8,598 > 3$$

Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit für das Intervall $[0 ; 161]$.

Aus der Tabelle kann nur die Wahrscheinlichkeit für ein um den Erwartungswert symmetrisches Intervall abgelesen werden, dieses enthält die Werte $[162 \dots 168 \dots 174]$. Daran anschließend folgt das Intervall $[175 \dots 300]$, welches aus Symmetriegründen die gleiche Größe wie $[0 ; 161]$ hat. Es gilt folgender Ansatz:

$$[\{ 0 \dots 161 \} \{ 162 \dots 168 \dots 174 \} \{ 175 \dots 300 \}]$$

$$P(X < 162) = P(X \leq 161) = \frac{1}{2} [1 - P(161,5 \leq X \leq 174,5)]$$

$$\text{Radius : } r = 168 - 161,5 = 6,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = z = \frac{6,5}{\sqrt{73,92}} \approx 0,756 \Rightarrow r \approx 0,756 \cdot \sigma$$

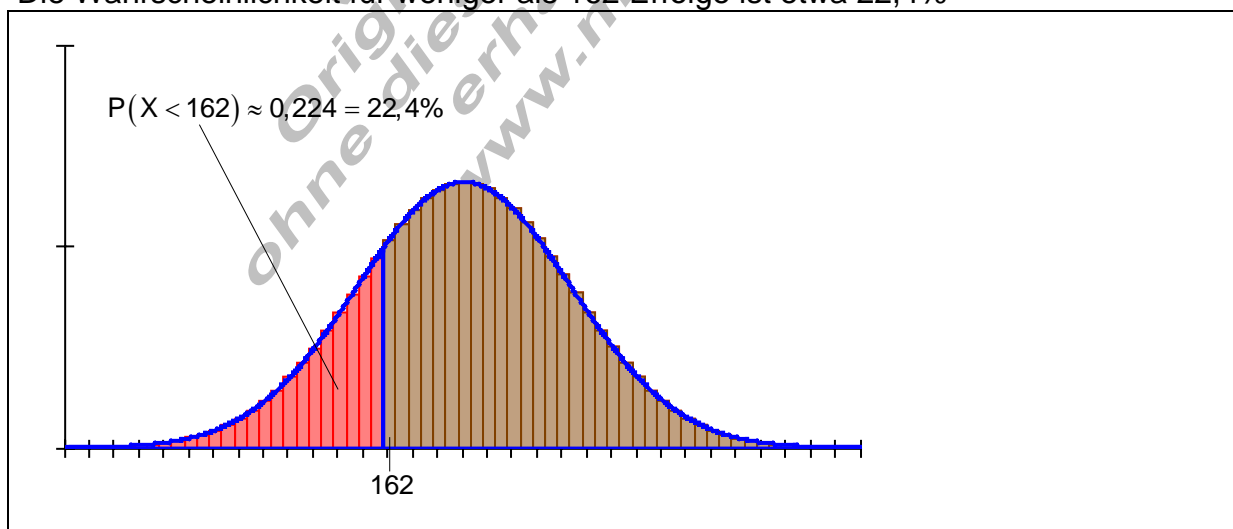
mit $z \approx 0,76$ wird

$$P(161,5 \leq X \leq 174,5) = P(\mu - z \cdot \sigma \leq X \leq \mu + z \cdot \sigma) \approx 0,553$$

und damit wird

$$P(X < 162) \approx \frac{1}{2} [1 - 0,553] = \frac{1}{2} \cdot 0,447 = \underline{\underline{0,2235}}$$

Die Wahrscheinlichkeit für weniger als 162 Erfolge ist etwa 22,4%



zu b)

$$n = 240 \quad \mu = n \cdot p = 240 \cdot \frac{1}{3} = 80$$

$$p = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{80 \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{160}{3}} \approx 7,303 > 3$$

$$[0; 79][79,5; 80,5][81; 240]$$

$$P(X > 80) = \frac{1}{2} [1 - P(79,5 \leq X \leq 80,5)]$$

$$\text{Radius : } r = 80 - 79,5 = 0,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = z = \frac{0,5}{\sqrt{\frac{160}{3}}} \approx 0,068 \Rightarrow r \approx 0,07 \cdot \sigma$$

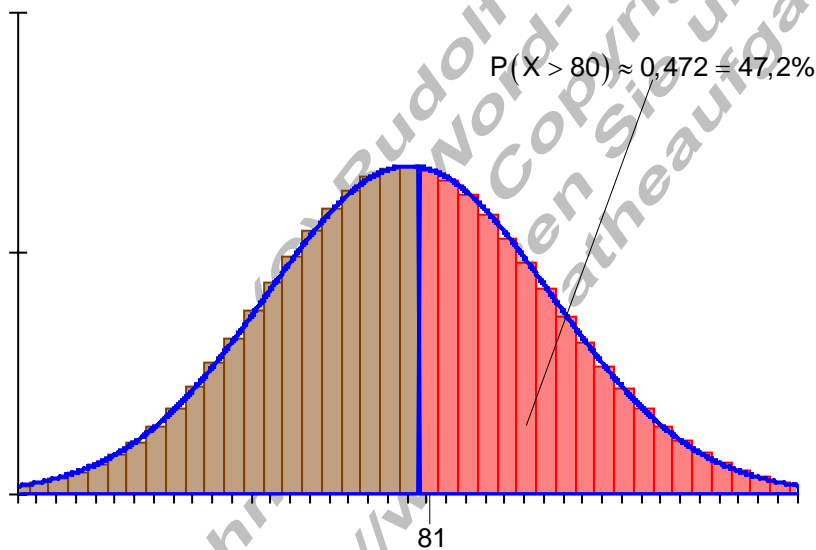
mit $z \approx 0,07$ wird

$$P(79,5 \leq X \leq 80,5) = P(\mu - z \cdot \sigma \leq X \leq \mu + z \cdot \sigma) \approx 0,056$$

und damit wird

$$P(X > 80) \approx 0,5 \cdot (1 - 0,056) = 0,5 \cdot 0,944 \approx 0,472$$

Die Wahrscheinlichkeit für mehr als 80 Erfolge ist etwa 47,2%



4. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit einer nicht symmetrischen Umgebung vom Erwartungswert.

$$n = 180 \quad p = 0,55 \text{ bestimmen Sie } P(89 \leq X \leq 104)$$

$$\left[\{89 \dots 93\} \{94 \dots 99 \dots 104\} \{105 \dots 109\} \right]$$

$$\text{Ansatz: } P(89 \leq X \leq 104) = \frac{1}{2} [P(89 \leq X \leq 109) + P(94 \leq X \leq 104)]$$

$$n = 180 \quad \mu = n \cdot p = 180 \cdot 0,55 = 99$$

$$p = 0,55 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{99 \cdot 0,45} = \sqrt{44,55} \approx 6,675 > 3$$

$$P(89 \leq X \leq 109) = P(88,5 \leq X \leq 109,5)$$

$$r = 10,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = z = \frac{10,5}{6,675} \approx 1,57 \Rightarrow r \approx 1,57 \cdot \sigma$$

$$P(89 \leq X \leq 109) \approx 0,884$$

$$P(94 \leq X \leq 104) = P(93,5 \leq X \leq 104,5)$$

$$r = 5,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = z = \frac{5,5}{6,675} \approx 0,82 \Rightarrow r \approx 0,82 \cdot \sigma$$

$$P(94 \leq X \leq 104) \approx 0,588$$

$$P(89 \leq X \leq 104) = \frac{1}{2} [0,884 + 0,588] = 0,736$$

Die Wahrscheinlichkeit der Erfolge im Intervall $[89 ; 104]$ ist etwa 73,6%

